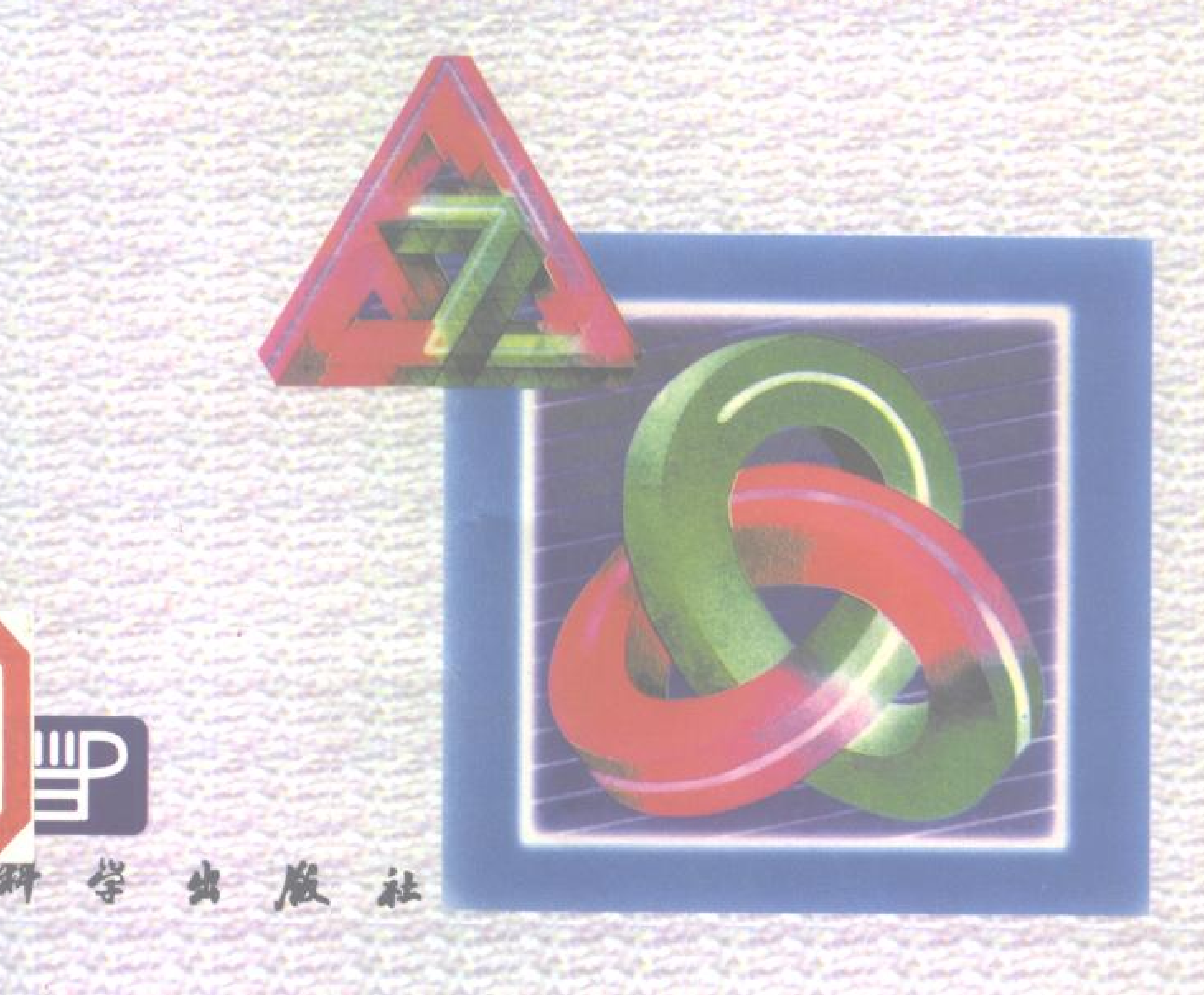
现代数学基础丛书

线性微分方程的非线性扰动

●徐登洲 马如云 著



科学出版社

现代数学基础丛书

线性微分方程的非线性扰动

徐登洲　马如云　著

科学出版社

1998

内容简介

本书灵活地运用多种非线性分析工具，系统地论述了一些重要的常微分方程和偏微分方程边值问题的解的存在性和唯一性，主要内容有：非共振问题，共振问题，强共振问题、特征线问题及其扰动。

读者对象：高校有关专业师生，科研人员。

现代数学基础丛书
线性微分方程的非线性扰动
徐登洲　马如云　著
责任编辑　林　鹏
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年2月第一版　开本：850×1168 1/32
1998年10月第二次印刷　印张：10
印数：2 001－4 000　字数：243 000

ISBN 7-03-003970-X/O・691

定价：20.00元

前言

非线性微分方程有着极为丰富的源泉，研究它的最基本方法是线性方程的非线性扰动. 本书将讨论几种常见而重要的常微分方程和偏微分方程的可解性及多解的存在性问题，我们未拘泥于某一种非线性分析方法，而采用灵活多样的分析工具，如单调算子理论、不动点定理解集连通理论、拓扑延拓定理及变分理论等. 本书坚持先有方程，后找分析工具研究方程的思想. 全书是依据扰动项的特征进行分类的.

本书第一章是以后诸章的基础，该章简介线性微分方程的基础知识及一系列最必要的分析工具，这样安排是为了便于读者. 因而对于已经熟悉了这部分内容的读者，完全可以直接读后几章. 有的读者即使不完全熟悉这部分内容，但若有较好的数学基础，也可先从后面几章读起，遇到有关概念和定理时再翻阅这一章.

第二章论述线性方程的不跨特征值扰动. 我们使用多种不同的分析方法，逐步实现扰动项由渐近一致向渐近非一致的过渡.

第三章在单调性假设、Landesman-Lazer 条件及符号条件下讨论线性方程的跨特征值扰动问题的一些结果.

第四章是强共振问题和带周期函数扰动项的共振问题之专题讨论.

第五章介绍广义谱理论及另外一种与梁方程有关的四阶两参数特征值问题. 该章的中心问题是广义特征值问题的非线性扰动的可解性.

每章之末以附注形式介绍有意义的工作和进展，书后的参考文献是按章编排的.

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的，但无囊括一切成果的奢望，在内容选取上我们固然要介绍若干重要的结果，但却又偏重于近20多年来的进展. 由于这些材料至今仍分散在国内外的文献之中，所以编写过程中没有现成的书可借鉴，加之水平所限，成书仓促，疏漏和错误在所难免. 真诚地欢迎读者批评指正.

陈文嵘教授和范先令教授阅读了本书初稿，提出了许多宝贵修改意见. 作者在此对他们表示深切的感谢.

本书的工作获甘肃省自然科学基金资助.

作者

1993.7

目　录

第一章　半线性微分方程的现代方法简介

在线性微分方程理论中，一个方程的解往往可以借助多种不同的方法而得到. 本书讨论带有非线性扰动的线性微分方程的解的存在性. 对于一个具体的方程，我们也常常试图利用多种不同的方法进行研究，所以首先对半线性微分方程的现代方法作简单介绍. §1.1 介绍本书所论及的几类重要的微分方程及Fredholm 抉择在线性微分方程中的应用；§1.2 简介Sobolev 空间. Sobolev 空间是非线性分析应用到微分方程问题中去的桥梁. 这部分内容现在已有许多著作可供阅读. 为了方便查阅，我们仅给出了定义和几个嵌入定理；在§1.3 至§1.8 中，分别罗列单调算子理论、不动点理论(如扭转映射的不动点定理，Schauder 不动点定理等)、拓扑度理论(如：Leray-Schauder 原理、Mawhin 延拓定理等)、临界点理论及集连通理论等方面的主要成果. 这里仅挑选出以后诸章最必要的材料，而略去证明. 对于已经熟悉了这些材料的读者，可越过这几节；对于想了解证明过程的读者，可根据出处参阅有关著作.

§ 1.1　线性微分方程

线性微分方程的理论是非线性微分方程理论的基础. 线性微分方程种类繁多，下面简介本书所论及的几类重要的线性微分方程.

1.1.1　线性特征值问题

(I) 弹簧振子的运动是通过二阶线性常微分方程

$$\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \tag{1.1}$$

来描写的. 其中$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

(a) 考虑带周期边值条件的线性特征值问题

$$\begin{aligned} &-\ddot{x} - \lambda x = 0, \\ &x(0) - x(2\pi) = \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中$\ddot{x} = \frac{dx}{dt}$.

定义线性算子$L_1 : D(L_1) \subset L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$.

$$L_1 u(t) = -\ddot{u}(t) \qquad \forall u \in D(L_1),$$

其中

$$D(L_1) = \left\{ u \in L^2(0, 2\pi) \middle| \begin{array}{c} u, \dot{u} \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 上绝对连续}, \ \dot{u} \in L^2(0, 2\pi) \\ u(0) - u(2\pi) = \dot{u}(0) - \dot{u}(2\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则 L_1 为自伴算子且 L_1 的特征值为 $r_N = N^2\ (N = 0, 1, 2, \cdots)$. $r_N = N^2$ 所对应的特征子空间为 span $\{\sin Nx, \cos Nx\}$.

(b) 考虑带两点边值条件(即Dirichlet 边值条件) 的线性特征值问题

$$\begin{aligned} &-\ddot{x} - \lambda x = 0, \\ &x(0) = x(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

定义线性算子$L_2 : D(L_2) \subset L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$

$$L_2 u(t) = -\ddot{u}(t) \qquad \forall u \in D(L_2),$$

其中

$$D(L_2) = \left\{ u \in L^2(0, \pi) \middle| \begin{array}{c} u, \dot{u} \text{ 在} [0, \pi] \text{ 上绝对连续} \\ \dot{u} \in L^2(0, \pi), \ u(0) = u(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则L_2 的特征值为$r_N = N^2(N=1,2,\cdots)$, $r_N = N^2$ 所对应的特征子空间为span $\{\sin Nx\}$.

(c) 考虑带Neumann 边值条件的线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\ddot{x} - \lambda x &= 0, \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

定义线性算子$L_3 : D(L_3) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$

$$L_3 u(t) = -\ddot{u}(t) \qquad \forall u \in D(L_3),$$

其中

$$D(L_3) = \left\{ U \in L^2(0,\pi) \,\middle|\, \begin{array}{c} u, \dot{u} \text{ 在 } [0,\pi] \text{ 上绝对连续} \\ \ddot{u} \in L^2(0,\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则L_3 的特征值为$r_N = N^2\ (N = 0,1,2,\cdots)$. $r_N = N^2$ 所对应的特征子空间为span $\{\cos Nx\}$.

(II) 处于稳定状态的温度场中的温度、流体的势以及弹性理论中的调和位势等均满足Laplace 方程

$$\Delta_1 u = 0, \tag{1.5}$$

其中$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

现在设$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一个具有光滑边界的区域. 记

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

(d) 考虑带Dirichlet 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u = 0, &\qquad x \in \Omega, \\ u = 0, &\qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

定义线性算子$L_4 : D(L_4) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$L_4 u = -\Delta u \qquad \forall u \in D(L_4),$$

其中

$$D(L_4) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)\}$$

(关于$W_0^{1,2}(\Omega)$ 及$W^{2,2}(\Omega)$ 的定义参见本章§2), 则L_4 是自伴算子且L_4 有一列特征值

$$(0 <)\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \cdots$$

具有如下性质:

(i) $\forall k, \lambda_k$ 对所对应的特征子空间均为有限维.

(ii) λ_1 所对应的某特征函数φ 满足

$$\varphi(x) > 0, \qquad \forall\, x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} < 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega,$$

其中$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ 表外法向导数.

(e) 考虑带Neumann 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

问题(1.7) 的特征值为

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots,$$

$\lambda_1 = 0$ 所对应的特征子空间为 span $\{1\}$; 对于任意自然数k, λ_k 所对应的特征子空间均是有限维的.

不难看出；当$N = 1$ 时，Laplare 算子便是二阶常微分算子d^2/dt^2.

(III) 弹性弦的波动方程

设$Q = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

(f) 考虑带周期—Dirichlet 边值条件的一维波方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \lambda u = 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = u(2\pi, x). \end{cases} \tag{1.8}$$

定义线性算子$L_6 : D(L_6) \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$

$$L_6 u = u_{tt} - u_{xx} \qquad \forall u \in D(L_6),$$

其中$D(L_6) = \{u \in L^2(Q) \mid \sum\limits_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}} (n^2 - m^2)^2 |c_{mn}|^2 < +\infty\}$ (注意：当$u \in L^2(Q)$ 时，u 可以Fourier 展开成$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} C_{jk} e^{ijt} \sin kx$, $\sum\limits_{k} \sum\limits_{j} |C_{jk}|^2 < \infty$. 为方便常用$\{C_{jk}\}$ 表示u), 则L_6 是一个有闭值域的自伴算子且L_6 的特征值集为

$$\{n^2 - m^2 \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\},$$

$r_{n,m} = n^2 - m^2$ 所对应的特征函数为

$$\varphi_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(nx)\sin(mt) & n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \\ \dfrac{1}{\pi} \sin(nx) & n \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(nx)\cos(mt) & n \in \mathbb{N}, \quad -m \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

易见，$\lambda = 0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(IV) 均匀梁的横向运动方程为

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0. \tag{1.9}$$

(g) 考虑带周期边值条件的梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}-\lambda u=0, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0, \\ u(0,x)=u(2\pi,x). \end{cases} \tag{1.10}$$

定义$L_7: D(L_7)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$

$$L_7u=u_{tt}+u_{xxxx} \qquad \forall u\in D(L_7),$$

其中$D(L_7)=\{u\in L^2(Q)\mid \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^4-m^2)^2|C_{mn}|^2<+\infty\}$. (注: $\forall u\in L^2(Q)$ 可Fourier 展开成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{jk}e^{ijt}\sin kx, \qquad \sum_k\sum_j|c_{jk}|^2<\infty),$$

则 L_7 是一个自伴算子且 L_7 的特征值集为

$$\{n^4-m^2\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}.$$

易见L_7 的特征值$\lambda=0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(h) 如果当时间充分大时，均匀梁的横向运动趋于稳态. 这时 (1.9) 相应的退化为一个与t 无关的方程

$$u_{xxxx}=0. \tag{1.11}$$

考虑带边值条件的弯曲梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{xxxx}-\lambda u=0, \\ u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(0)=0. \end{cases} \tag{1.12}$$

定义线性算子$L_9 : D(L_9) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$

$$L_9 u = u_{xxxx}, \qquad \forall\, u \in D(L_9),$$

其中

$$D(L_9) = \left\{ u \in L^2(0,\pi) \;\middle|\; \begin{array}{c} u,\ \dot{u},\ \ddot{u},\ \dddot{u} \text{ 在 } [0,\pi] \text{ 上绝对连续} \\ u^{(4)} \in L^2(0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = \ddot{u}(0) = \ddot{u}(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则L_9 的特征值为$\lambda_N = N^4 (N = 1, 2, \cdots)$. λ_N 所对应的特征子空间为$\mathrm{span}\{\sin Nx\}$.

附注　除了以上几类特征值问题外，在第五章，还将讨论下列两类特征线性问题

(i)

$$\begin{cases} \ddot{u} + \lambda_+ u^+ - \lambda_- u^- = 0, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中$u^+ = \frac{1}{2}(|u| + u), u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$.

(j)

$$\begin{cases} u^{(\mathrm{IV})} - \alpha \ddot{u} + \beta u = 0, \\ u(0) = u(1) = \ddot{u}(0) = \ddot{u}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

(1.13) 不再是线性问题了. (1.13) 和(1.14) 可分别看成是(1.3) 和(1.12) 的推广.

1.1.2　Fredholm 二择一性质

设X 和Y 都是赋范线性空间. 映射$T : X \to Y$ 称为是紧的(或全连续的), 如果T 把X 中的有界集映成Y 中的相对紧集，或等价地，T 把X 中的有界序列映为Y 中含有收敛子列的序列. Fredholm 二择一性质(或称Riesz-Schauder 原理) 涉及空间X 到自身的紧线性算子，并且是有限维空间线性映象理论的一个推广.

定理 1.1.1 设T 是赋范线性空间X 到自身中的一紧线性映射. 那么, 或者(i) 齐次方程

$$x - Tx = 0$$

有非平凡解$x \in X$, 或者(ii) 对每个$y \in X$, 方程

$$x - Tx = y$$

有唯一确定的解$x \in X$. 而且在情形(ii), 已断定其存在性的算子$(I - T)^{-1}$ 也是有界的.

证明略. 参见Gilbarg 和Trudinger [13].

在§1.1.1 中讨论了几类特殊的线性算子的特征值和特征函数. 一般地, 设$T : X \to X$ 为紧线性算子, 如果X 中存在非零元x 满足$Tx = \lambda x$, 就称λ 为T 的特征值. 很明显属于不同特征值的特征向量必然是线性无关的. 算子$S_\lambda = \lambda I - T$ 的零空间的维数称为λ 的重数. 如果$\lambda \neq 0$ 且$\lambda \in \mathbb{R}$ 不是T 的特征值, 从定理1.1.1 推出, 预解算子$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 是有明确定义的、把X 映上自身的有界线性映射.

如下结果刻画了赋范线性空间到自身的紧线性映射的特征值集的特性.

定理 1.1.2 赋范线性空间到自身中的紧线性映射T 的特征值全体构成一个可数集. 这个集合除$\lambda = 0$ 可能例外外, 没有别的极限点. 每一非零特征值均有有限的重数.

证明略. 参见[13].

利用定理1.1.2, 可以帮助我们进一步理解§1.1.1 中的结果.

例 设Ω 是一个具有足够光滑边界的区域. 考虑线性特征值问题

$$-\Delta u - \lambda u = 0, \qquad x \in \Omega,$$
$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$

定义线性算子$L:D(L)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$

$$Lu=-\Delta u \qquad \forall u\in D(L),$$

其中$D(L)=W^{2,2}(\Omega)\cap W_0^{1,2}(\Omega)$. 则$L$ 为自伴算子. 因L 正定, 从而$\widetilde{K}\triangleq L^{-1}$ 存在.

由Poincaré 不等式:

$$\left|\int_\Omega u\cdot v\right|\le C\Big(\int_\Omega |u|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{W_0^{1,2}}, \quad \forall u\in L^2(\Omega), \quad v\in W_0^{1,2}(\Omega)$$

及Riesz 表现定理, 存在有界线性算子$K:L^2(\Omega)\to W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega u\cdot v=(Ku,v)_{W_0^{1,2}} \qquad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

其实这个K 就是$\widetilde{K}=L^{-1}$, 这是因为

$$\int_\Omega u\cdot v=\int_\Omega -\Delta\widetilde{K}u\cdot v=\int\nabla\widetilde{K}u\cdot\nabla v=(\widetilde{K}u,v)_{W_0^{1,2}},$$

于是K 作为$W_0^{1,2}(\Omega)$ 到自身的自伴紧算子有谱: $\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_n\ge\cdots\to 0$. 由此可见$L=-\Delta$ 有谱: $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots\to+\infty$. 其中$\lambda_i=\frac{1}{\mu_i}$, $i=1,2,\cdots$.

1.1.3 线性微分方程

一般的常微分方程教程、数学物理方程教程及线性泛函分析教程中均可见到讨论线性方程解的存在性及解集结构的理论、方法和结果, 有些结果已能给出解的具体表达式, 故这里仅给出两个特殊的结果. 一个是关于二阶线性椭圆方程的结果; 另一个是关于线性弯曲梁方程可解性的结果. 这类结果本身是重要的, 获得它们的方法可以用于处理其他类型的方程.

定理 1.1.3 设$\Omega \subset \mathbb{R}^N$为有足够光滑边界的区域. $h \in L^2(\Omega)$. 对于线性椭圆方程Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = h, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

有

(i) 如果λ 不是$-\Delta$ 的特征值, 则(1.15) 有唯一解$u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

(ii) 如果$\lambda = \lambda_k$ 是$-\Delta$ 的特征值, M_k 为λ_k 所对应的特征子空间, 则当$h \perp M_k$ 时, (1.15) 有无穷多个解; 当h 不与M_k 直交时, (1.15) 无解.

注. $h \perp M_k$ 是指: $\forall \varphi \in M_k, \int_\Omega h\varphi = 0$

证明 (i) 由1.1.1 知, $-\Delta : W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 有有界逆$K : L^2(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. 因$W_0^{1,2}(\Omega)$ 紧嵌入$L^2(\Omega)$, 故$K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 为紧算子.

由于齐次方程Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u = 0, \quad & x \in \Omega, \\ u = 0, \quad & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

当$\lambda \neq \lambda_k$ 时没有非平凡解. 即

$$u - (\lambda K)u = 0$$

没有非平凡解, 据Fredholm 二择一性质, 对于$\forall y = Kh \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$u - (\lambda K)u = y$$

有唯一解$u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

(ii) 如果$\lambda=\lambda_k$. 记$L:D(L)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$

$$Lu=-\Delta u-\lambda_k u, \qquad \forall u\in D(L),$$

其中$D(L)=W^{2,2}(\Omega)\cap W_0^{1,2}(\Omega)$. 令$V=\ker(L)$, 则Range$(L)=V^{\perp}$. 这里$V^{\perp}:L^2(\Omega)=V\oplus V^{\perp}$. 由嵌入定理, $\widetilde{K}\triangleq(L|_{D(L)\cap V^{\perp}})^{-1}:V^{\perp}\to V^{\perp}$ 为紧算子. 因λ_k 不再是$\widetilde{K}$ 的特征值, 故由(i), 在$V^{\perp}$中, 问题

$$\begin{aligned}-\Delta u-\lambda_k u=h, &\qquad x\in\Omega, \quad u\in D(L)\cap V^{\perp},\\ u=0, &\qquad x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

有唯一解u_0.

不难验证, 在$D(L)$ 上, (1.15) 的解集为

$$u_0\oplus M_k.$$

如果$\lambda=\lambda_k$ 且h 不与$M_k=V$ 直交, 则h 可唯一地分解成$h=h_0+h_1$. 其中$h_0\in V$ 而$h_1\in V^{\perp}$, 并且有$h_0\neq 0$. 反设(1.15) 有解u. 以h_0 乘以(1.15) 的两边, 然后分部积分得

$$0=\int_{\Omega}h_0^2.$$

矛盾! 故此时(1.15) 无解. ∎

定理 1.1.4 如果$f\in C[0,1]$ 且对$\forall x\in[0,1]$, 有

$$f(x)\neq j^4\pi^4, \qquad j=1,2,\cdots,$$

则对于任给的$u_0,u_1;\overline{u}_0,\overline{u}_1\in\mathbb{R}$ 及任意连续函数$g\in C[0,1]$, 梁方程边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{d^4u}{dx^4}-f(x)u=g(x), \qquad 0<x<1,\\ &u(0)=u_0, \quad u(1)=u_1, \quad \ddot{u}(0)=\overline{u}_0, \quad \ddot{u}(1)=\overline{u}_1\end{aligned} \tag{1.16}$$

有唯一解.

证明　设$G(x,s)$ 是问题

$$\begin{cases} \ddot{v}(x)=h(x), & 0<x<1, \\ v(0)=v(1)=0 \end{cases}$$

的Green 函数，则可将(1.16) 转化为空间$C[0,1]$ 上的积分方程

$$u-Tu=z, \tag{1.17}$$

其中

$$\begin{aligned}(Tu)(x)=&\int_0^1\int_0^1 G(x,s)G(s,t)f(t)u(t)dtds,\\ z(x)=&u_0+x(u_1-u_0)+\int_0^1 G(x,s)\Big[\overline{u}_0+s(\overline{u}_1-\overline{u}_0)\\ &+\int_0^1 G(s,t)g(t)\,dt\Big]\,ds.\end{aligned}$$

现在我们只需证明：对任意$z(x)\in C[0,1]$, (1.17) 唯一可解. 由于$T:C[0,1]\to C[0,1]$ 是紧线性映象，由Fredholm 二择一性质，只要证得方程

$$u-Tu=0 \tag{1.18}$$

只有平凡解$u=0$ 就够了.

先将(1.18) 还原成边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}-f(x)u=0, & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=\ddot{u}(0)=\ddot{u}(1)=0. \end{cases} \tag{1.19}$$

再选取常数$k\neq j^4\pi^4, j=1,2,\cdots$. 定义映象$L:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$,

$$Lv=u,$$

其中u,v 满足

$$\frac{d^4u}{dx^4}-ku=v(x),\qquad 0<x<1,$$
$$u(0)=u(1)=\ddot{u}(0)=\ddot{u}(1)=0.$$

因$\{\sqrt{2}\sin(j\pi x)\}_{j=1,2,\cdots}$ 是$L^2(0,1)$ 的一组完全正交基，故在$L^2(0,1)$ 中，我们有

$$u(x)=\sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty}a_j\sin(j\pi x),\qquad v(x)=\sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty}b_j\sin(j\pi x),$$

其中$a_j=\frac{b_j}{j^4\pi^4-k}$，$j=1,2,\cdots$. 利用Parseval 恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2}^2&=\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|b_j|^2}{(j^4\pi^4-k)^2}\\&\leq c\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2=c\|v\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{1.20}$$

而

$$c=c(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\pi^4-k)^2} & \text{当 } k<\pi^4,\\ \dfrac{1}{\min\{(j^4\pi^4-k)^2,([j+1]^4\pi^4-k)^2\}} & \\ \qquad\qquad \text{当 } k\in(j^4\pi^4,[j+1]^4\pi^4),\end{cases}\tag{1.21}$$

则由(1.20) 可知

$$\|L\|^2\leq c.\tag{1.22}$$

另一方面，我们可把(1.19) 改写成

$$\begin{cases}\dfrac{d^4u}{dx^4}-ku=(f(x)-k)u,\qquad 0<x<1,\\ u(0)=u(1)=\ddot{u}(0)=\ddot{u}(1)=0.\end{cases}\tag{1.23}$$

定义$K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$

$$(Ku)(x) = L([f-k]u)(x), \qquad u(x) \in L^2[0,1],$$

则K 是一个线性算子且满足

$$\|Ku\|_{L^2}^2 \leq \|L\|^2 \sup(f(x)-k)^2 \|u\|_{L^2}^2. \tag{1.24}$$

因为$f(x) \neq j^4\pi^4, \forall x \in [0,1]$, $j = 1, 2, \cdots$ 故由f 的连续性可知：要么

$$\sup f(x) < \pi^4, \tag{1.25}$$

要么存在整数$j > 0$ 及常数p 和q, 使

$$j^4\pi^4 < p \leq \inf f(x) \leq \sup f(x) \leq q < (j+1)^4\pi^4. \tag{1.26}$$

利用(1.21), (1.22), (1.23) 及(1.24) 不难推知：可找到相应于f 的常数$c(k)$, 使$c(k)\sup(f(x)-k)^2 < 1$. 从而$\|K\| < 1$. 于是$u = Ku$ 有唯一的不动点$u = 0$. 即(1.18) 仅有平凡解$u = 0$. ∎

§ 1.2 Sobolev 空间与嵌入定理

由于本节所有的结果均没有给出证明，不熟悉Sobolev 空间理论的读者可参阅Adams [12]、Gilbary 和Trudinger [13] 及李立康和郭毓陶[10] 等专著.

1.2.1 Sobolev 空间

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域. 用以下记号

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\partial_n}},$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ 表示支集关于Ω 紧的一切C^∞ 函数全体. 用$\mathcal{D}'(\Omega)$ 表示$\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函全体, 即广义函数空间.

设 m 是一个正整数. 记

$$C^m(\overline{\Omega})=\{u:\overline{\Omega}\to \mathbb{R}^1 \mid \partial^\alpha u(x) \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 上连续}, |\alpha|\le m\}.$$

规定模为

$$\|u\|_{C^m}=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\partial^\alpha u(x)|, \tag{2.1}$$

称$C^m(\overline{\Omega})$ 为m 次连续可微函数空间.

又设$0<\gamma\le 1$, 记

$$C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})=\left\{u\in C^m(\overline{\Omega})\left|\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\ne y}}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}<+\infty,|\alpha|=m\right.\right\}.$$

规定模为

$$\|u\|_{m,r}=\|u\|_{C^m(\Omega)}+\sup_{\substack{x\ne y\\ |\alpha|=m}}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma},$$

称$C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ 为$m+\gamma$ 次Hölder 连续函数空间.

设$p\ge 1$, $m\ge 0$ 是一整数. 记

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega)\mid \partial^\alpha u\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\le m\},$$

这里$\partial^\alpha u$ 是u 的α 阶广义导数. 规定模

$$\|u\|_{W^{m,p}}=\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2}$$

称$W^{m,p}(\Omega)$ 为Sobolev 空间.

Sobolev 空间有下列主要性质

(i) 对于$p: 1 < p < \infty, W^{m,p}(\Omega)$ 是可分自反的Banach 空间.

(ii) 在内积

$$\langle u, v\rangle_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha u,\, \partial^\alpha v\rangle_{L^2} \tag{2.3}$$

下，$W^{m,2}(\Omega)$ 是一个Hilbert 空间.

(iii) 记$W_0^{m,p}(\Omega)$ 为$\mathcal{D}(\Omega)$ 在$W^{m,p}(\Omega)$ 中的完备化空间. 则$W_0^{m,p}(\Omega)$ 是$W^{m,p}(\Omega)$ 的闭线性子空间. 并且$W_0^{m,2}(\Omega)$ 在$W^{m,2}(\Omega)$ 的内积下为Hilbert 空间. 进一步

$$\langle u, v\rangle_{W_0^{m,2}} = \sum_{|\alpha|=m} \langle \partial^\alpha u,\, \partial^\alpha v\rangle_{L^2} \tag{2.4}$$

也是$W_0^{m,2}(\Omega)$ 的一个内积. 并且该内积导出的范数与内积(2.3) 在$W_0^{m,2}$ 中导出的范数等价.

1.2.1 嵌入定理

以$\hookrightarrow$ 表示连续嵌入，而以$\hookrightarrow\hookrightarrow$ 表示紧嵌入.

定理 1.2.1 (i) 若$p < \frac{n}{m}$, 则对任意$q < \frac{np}{n-p}$, 有

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

(ii) 若$0 \leq k < m - \frac{n}{p}$, 则

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

一般说来，在定理1.2.1 中，$W_0^{m',p}(\Omega)$ 不能用$W^{m',p}(\Omega)$ 来代替. 然而对一大类区域Ω 还是可以做这种代替的，比如说边界满足一致内部锥条件的区域Ω 及具有Lipschitz 连续边界的区域Ω 等.

对具有Lipschitz 连续边界的区域，有如下嵌入结果

定理 1.2.2

(i) $1 \le p < n,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(ii) $p = n,\ q \in [1, +\infty) \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(iii) $p \ge 1,\ mp < n,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(iv) $p \ge 1,\ mp = n,\ q \in [1, \infty) \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(v) $p \ge 1,\ mp > n \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$;

(vi) $1 \le p < n,\ \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(vii) $p \ge 1,\ mp < n,\ 1 \ge \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(viii) $q \ge 1,\ mp = n,\ q \in [1, \infty) \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(ix) $p \ge 1,\ mp > n \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.

注　在以上两个嵌入定理中，常出现一个Sobolev 空间嵌入连续函数空间$C^0(\overline{\Omega})$ 的结果. 比如：定理1.2.2 (ix) 的结论

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}). \tag{2.5}$$

依嵌入定义，(2.5) 表明

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}). \tag{2.6}$$

这时，应将$W^{m,p}(\Omega)$ 理解为按a.e. 相等关系分成的等价类的集合，而关系式(2.6) 的含义是指$W^{m,p}(\Omega)$ 的任何一个等价类中均包含一个定义在$\overline{\Omega}$ 上的连续函数.

1.2.3 $n = 1$ 时的 Sobolev 空间

由于本书讨论常微分方程的内容较多，故$n = 1$ 时的Sobolev 空间显得格外重要.

当$n = 1$ 时，$\Omega = (a, b)$. 记$W^{m,p}((a, b)) = W^{m,p}(a, b)$. 此时，$W^{m,p}(a, b)$ 可定义为

$$W^{m,p}(a,b) = \left\{ u : [a,b] \to I\!R^1 \;\middle|\; \begin{array}{c} u, \dot{u}, \cdots, u^{(m-1)} \text{ 在 } [a,b] \text{ 上绝对连续} \\ u^{(m)} \in L^p(a,b) \end{array} \right\}$$

其模为

$$\|u\|_{W^{m,p}}=\left\{\sum_{j=1}^{m}\|u^{(i)}\|_{L^p}^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.7}$$

其中$u^{(i)}=\frac{d^iu}{dx^i}$.

定理 1.2.3 $W^{m,p}(a,b)\hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-1}([a,b])$.

当$n=1$ 时，$W_0^{m,p}(a,b)$ 也可定义为

$$W_0^{m,p}(a,b)=\left\{u\in W^{m,p}(a,b)\;\middle|\;\begin{array}{c}u(a)=\cdots=u^{(k-1)}(a)\\=u(b)=\cdots=u^{(k-1)}(b)=0\end{array}\right\},$$

其模为

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(a,b)}=\|u^{(m)}\|_{L^p(a,b)},\qquad u\in W_0^{m,p}(a,b). \tag{2.8}$$

可以验证，(2.8) 与(2.7) 限制在$W_0^{m,p}(a,b)$ 上导出的范数等价.

§ 1.3 单调算子

1.3.1 单调算子的概念

设E 是实Banach 空间，E^* 是E 的共轭空间. 对$x\in E$, $f\in E^*$, 记$(f,x)=f(x)$.

设$D\subset E$, 算子$T:D\to E^*$. 如果满足条件

$$(Tx-Ty,\,x-y)\geq 0\qquad\forall x,\,y\in D, \tag{3.1}$$

则称T 是单调算子. 若更设(3.1) 式中的等号当且仅当$x=y$ 时成立，则称T 是严格单调映象.

设算子$T:D\to E^*$ 为单调算子，并且由“$(g-Ty,\,x-y)\geq 0$, 对任意$y\in D$ 成立” 可推出“$x\in D$ 且$Tx=g$”, 则称T 为极大单调算子.

例 1 设$f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是增函数，即$-\infty<x_1<x_2<+\infty$ 有$f(x_1)\le f(x_2)$ (注意，f 不必连续), 则f 是单调算子. 事实上，$(\mathbb{R}^1)^*=\mathbb{R}^1$, 且

$$(f(x_1)-f(x_2),x_1-x_2)=(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)\ge 0,\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^1.$$

又显然，若$f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是严格增函数，即对$-\infty<x_1<x_2<+\infty$ 有$f(x_1)<f(x_2)$, 则f 是严格单调算子.

例 2 设H 是实Hlbert 空间，$A:H\to H$ 是非扩张算子，即

$$\|Ax-Ay\|\le\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in H.$$

则$T=I-A:H\to H$ 必是单调映象. 事实上，我们有

$$\begin{aligned}(Tx-Ty,x-y)=&\|x-y\|^2-(Ax-Ay,x-y)\\ \ge&\|x-y\|^2-\|Ax-Ay\|\cdot\|x-y\|\\ \ge&0,\qquad \forall x,y\in H.\end{aligned}$$

例 3 设$f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是增函数，且至少在一点不连续，则f 是单调映象，但不是极大单调的. 事实上，设f 在x_0 点不连续，因f 为增函数，故$f(x_0-0)$ 与$f(x_0+0)$ 均存在，且

$$f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0).$$

随便取$g\in(f(x_0-0),\ f(x_0+0))\setminus\{f(x_0)\}$, 则不难验证

$(g-f(y),x_0-y)\ge 0$ 对$\forall y\in\mathbb{R}^1$ 成立. 但$f(x_0)\ne g$. 可知f 不满足极大单调的定义

设$D\subset E$, 算子$T:D\to E^*$

(i) 设$x_0\in D$. 若$X_n\in D$, $x_n\to x_0\Longrightarrow(Tx_n,y)\to(Tx_0,y)$, 对$\forall y\in E$ 成立，则称T 在x_0 处是次连续的(demicontinuous). 若T 在D 中的每一点都次连续，则称T 在D 上次连续的.

(ii) 设$x_0 \in D$, 若$h \in E$, $t_n > 0, x_0 + t_n h \in D, t_n \to 0 \Longrightarrow (T(x_0 + t_n h), y) \to (Tx_0, y)$, 对$\forall y \in E$ 成立, 则称T 在x_0 处是半连续的(hemicontinuous); 若T 在D 中的每一点都半连续, 则称T 在D 上是半连续的.

定理 1.3.1 设E 是自反的Banach 空间. 则对于单调映象$T: E \to E^*$,T 在E 上次连续与T 在E 上半连续是等价的; 特别地, 对于单调线性映象$T: E \to E^*$, T 在E 上连续$\Longleftrightarrow$ T 在E 上次连续$\Longleftrightarrow$ T 在E 上半连续.

定理 1.3.2 若$T: E \to E^*$ 半连续、单调, 则T 必是极大单调的.

证明见郭大钧[4].

1.3.2 单调算子的满值性

定理 1.3.3 (单调算子的锐角原理) 设E 自反, 映象T: $E \to E^*$ 半连续、单调. 又设对于某$r > 0$, 有

$$(Tx, x) \geq 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega_r, \tag{3.2}$$

其中$\Omega_r = \{x \mid x \in E, \|x\| < r\}$. 那么方程$Tx = \theta$ 在$\overline{\Omega}$ 中必有解.

证明见Browder [19, 定理13].

利用定理 1.3.3 可以推得如下关于单调算子满值性的 Minty-Browder 定理.

定理 1.3.4 设E 自反, 算子$T: E \to E^*$ 半连续、单调. 又设T 是强制的, 即满足

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(Tx, x)}{\|x\|} = +\infty, \tag{3.3}$$

那么T 必满值, 即$T(E) = E^*$.

Minty-Browder 定理(定理1.3.4) 是单调算子的基本定理之一, 它有许多应用.

定理 1.3.5 设E 自反，映象$T: E \to E^*$ 半连续且满足强单调条件

$$(Tx - Ty, x - y) \geq \alpha(\|x - y\|) \cdot \|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in E,$$

其中$\alpha(0) = 0, \alpha(t) > 0\ (\forall\, t > 0), \lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = +\infty$. 那么，$T$ 满值且是$1 - 1$ 对应的.（即对任何$f \in E^*$, 方程$Tx = f$ 在E 中具有唯一解.）

由定理1.3.5 可以给出单调算子$T: E \to E^*$ 为1-1 映象的一组充分条件.

定理 1.3.6 在定理1.3.5 的条件下，若更设$T: E \to E^*$ 是连续的，函数$\alpha(t)$ 在$0 < t < +\infty$ 上是连续的，那么，T 是E 与E^* 之间的同胚映象.

推论 设E 自反，映象$T: E \to E^*$ 在E 中每一点Fréchet 可微，且存在常数$C > 0$, 使

$$(T'(x)h, h) \geq C\|h\|^2, \qquad \forall\, x, h \in E,$$

那么，T 是E 与E^* 之间的同胚映象.

下面假定$D \subseteq E$, 讨论单调算子$T: D \to E^*$ 的满值性.

定理 1.3.7 设E 是自反的Banach 空间，$L: D \subseteq E \to E^*$ 是一个具有线性定义域D 的极大单调算子，$G: E \to E^*$ 是一个半连续、单调的强制算子，则$T = L + G$ 满值，即对任意$g \in E^*$, 方程$Lu + G(u) = g$ 至少有一个解.

证明见[18, P.29].

定理 1.3.8 设H 是一个实Hilbert 空间，$T: D(T) \subseteq H \to H$ 是一个具有闭稠定线性定义域的映象. 设$T = L + G$, 其中L 线性而$G: H \to H$ 非线性，且满足

(i) G 半连续且有界.

(ii) L 线性、闭且$L^* = L^*|_{D(L)\cap D(L^*)}$.

(iii) T 为单调算子.

(iv) T 为强制算子.

则T 满值.

证明见Browder [19, 定理16].

1.3.3 凸泛函与其梯度算子

定理 1.3.9 设$f(x)$ 是实Banach 空间E 上的泛函，且$\text{grad}\, f(x) = F(x)$, $\forall x \in E$, 那么$F: E \to E^*$ 是单调算子的充要条件是$f(x)$ 为凸泛函，即

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \le tf(x) + (1-t)f(y), \qquad \forall x, y \in E, \quad 0 \le t \le 1.$$

下面引进一个比凸性更强的概念.

设E 为实Banach 空间，$f: E \to \mathbb{R}^1$. 如果存在一个正数$\alpha > 0$, 使对$\forall u, v \in E$ 及$0 \le t \le 1$, 有

$$f(tu + (1-t)v) \le tf(u) + (1-t)f(v) - \frac{1}{2}\alpha t\|u - v\|^2,$$

则称f 在E 上是α 凸的.

设H 是一个Hilbert 空间. 定义在H 的凸子集上的α 凸泛函有下列两个性质.

定理 1.3.10 设$D \subseteq H$ 为H 的凸子集. $f: D \subseteq H \to \mathbb{R}^1$ 是一个泛函，而$\nabla f: H \to H$ 为f 的Gâteau 导数，则f 在D 上α 凸的充要条件为∇f 是α- 单调算子，即对$\forall u, v \in D$,

$$(\nabla f(u) - \nabla f(v), u - v) \ge \alpha\|u - v\|^2.$$

定理 1.3.11 设$D \subseteq H$ 为H 的一个凸子集. $f: D \subseteq H \to \mathbb{R}$ 是一个泛函，而$\nabla f: H \to H$ 为f 的Gâteau 导数，则f 在D 上α 凸的充要条件为对$\forall u, v \in D$,

$$f(u) - f(v) \ge (\nabla f(v), u - v) + \frac{1}{2}\alpha\|u - v\|^2.$$

§ 1.4 同胚的充分条件

在定理1.3.6 及其推论中，我们曾给出过单调映象为同胚映象的充分条件. 本节将进一步介绍映象为同胚映象的其他类型的条件.

定理 1.4.1 (Hadamard 反函数定理) 设X, Y 均为Banach 空间，$T \in C^1(X, Y)$. 设T 是一个局部同胚映象. 记

$$\zeta(R) = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\| < R}} \frac{1}{\|[T'(x)]^{-1}\|}.$$

如果

$$\int_0^\infty \zeta(R)\, dR = +\infty,$$

则T 是X 到Y 的同胚映象.

证明见[3] 或[9].

下面举例说明，在定理1.4.1 中，条件$\int_0^\infty \zeta(R)\, dR = +\infty$ 是不可少的，甚至在有限维的情形也不能削弱成：$\det f'(x) > 0$.

例 1 考察映象$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为

$$F(x_1, x_2) = (\operatorname{arc\,tg} x_1, x_2(1 + x_1^2)^2),$$

那么，$F \in C^1$, 且

$$F'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + x_1^2} & 0 \\ 4x_1 x_2 (1 + x_1^2) & (1 + x_1^2)^2 \end{bmatrix} \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$

易见

$$\det F'(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 \geq 1 > 0,$$

这可以保证$F: I\!R^2 \to I\!R^2$ 为局部同胚. 由F 的定义可以看出，$F: I\!R^2 \to I\!R^2$ 是单射，但F 不是满射. 所以F 不是同胚. 事实上，由F' 的表示式可以看出，$\lambda = \frac{1}{1+x_1^2}$ 是$F'(x_1, x_2)$ 的特征值. 因此$\frac{1}{\lambda} = 1+x_1^2$ 是$[F'(x_1,x_2)]^{-1}$ 的特征值. 由此可推出$\|F'(x_1,x_2)^{-1}\| \geq 1+x_1^2$. 于是

$$\inf_{\|x\|<R} \frac{1}{\|[F'(x_1,x_2)]^{-1}\|} \leq \inf_{\|x\|=\frac{R}{2}} \frac{1}{\|[F'(x_1,x_2)]^{-1}\|}$$

$$\leq \frac{1}{\left\|\left[F'\left(\frac{R}{2},0\right)\right]^{-1}\right\|} \leq \frac{1}{1+\left(\frac{R}{2}\right)^2}.$$

当然

$$\int_0^\infty \zeta(R)\, dR \leq \int_0^\infty \frac{dR}{1+\left(\frac{R}{2}\right)^2} < +\infty.$$

设X, Y 均为Banach 空间，U 为X 的一个开子集，$\Phi: U \to Y$ 为一个映象. 如果对于任意紧集$K \subset Y, K$ 的原象集$\Phi^{-1}(K)$ 都为X 中的紧集，则称Φ 为proper 映象.

关于proper 映象，有如下重要性质.

定理 1.4.2 设$\Phi \in C^1(X,Y)$ 为proper 映象且为局部同胚，则$\Phi: X \to Y$ 同胚.

证明见[3].

§ 1.5 常用的不动点定理

1.5.1 压缩映象原理

设(X_1, d_1) 和(X_2, d_2) 为两个度量空间. $F: D(F) \subset X_1 \to X_2$ 是一个映象. 如果存在一个常数$\lambda > 0$ 使

$$d_2(F(x),\, F(y)) \leq \lambda d_1(x,\, y), \qquad x, y \in D(F),$$

则称F 是Lipschitz 连续映象；如果$\lambda \in [0,1]$ 则称F 为非扩张映象；如果$\lambda \in [0,1)$, 则称F 为压缩映象.

设$M \subset X_1$, 映象$T: M \to M$, 如果存在$\bar{x} \in M$, 使$T\bar{x} = \bar{x}$, 则称$\bar{x}$ 为T 的不动点. 最重要的不动点存在性结果是Banach 压缩映象原理.

定理 1.5.1 (Bancah 压缩映象原理) 设X 是一个完备的度量空间，$F: X \to X$ 是一个压缩映象. 则F 有唯一的不动点.

我们再引述两个与定理1.5.1 相似的结果.

定理 1.5.2 ([18], p.28) 设X 是完备的度量空间，$F: X \to X$. 如果存在自然数n, 使$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n个}$ 为压缩映象. 则F 有唯一的不动点.

定理 1.5.3 ([18]) 设E 是一个自反Banach 空间，V 是E 上一个连续的一致凸实值函数，$V(0) = 0$; 对$\forall x \neq 0$, $V(x) > 0$; 且对$\forall r \geq 0$, $\{x \mid V(x) \leq r\}$ 为有界集. 进一步，设$K \subset E$ 是一个非空有界闭凸集. 如果F: $K \to K$ 满足$V(F(x) - F(y)) \leq V(x - y)$, 对$\forall x, y \in K$ 成立. 则F 在K 内有一个不动点.

上述结果是根据“度量”特征建立的.

1.5.2 Schauder 不动点定理

在陈述Schauder 不动点定理之前，先陈述一个有限维空间中的结果.

定理 1.5.4 (Brouwer) 设$K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空有界闭凸集，映象$F: K \to K$ 连续，则F 至少有一个不动点.

证明见[18], [4].

在无穷维空间中，非空有界闭凸集不再是紧集，故需对F 作更强的假定. 这便是如下的定理

定理 1.5.5 (Schauder 不动点定理) 设K 是Banach 空间E 中

的一个非空有界闭凸集. $F: K \to K$ 是一个紧且连续的映象. 则 F 在K 中至少有一个不动点.

注 定理1.5.4 和定理1.5.5 均是根据“拓扑” 特征建立的不动点定理.

1.5.3 Poincaré-Birkhoff 不动点定理

令 (r, θ) 为平面$\mathbb{R}^2$ 上的一个极坐标系，0 为其极点. 用A 表示$\mathbb{R}^2$ 上的一给定圆环域：$R_1 \le r \le R_2 (0 < R_1 < R_2)$.

一个映射$T: A \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 称为扭转映射，如果它可以表示为

$$r^* = f(r, \theta), \quad \theta^* = \theta + g(r, \theta), \tag{5.1}$$

其中f 和g 在A 上连续，对于θ 是2π 周期的并且满足以下“扭转条件”

$$g(R_1, \theta) \cdot g(R_2, \theta) < 0, \tag{5.2}$$

这里(r^*, θ^*) 表示(r, θ) 在映射T 下的象点.

定理 1.5.6 (Poincaré-Birkhoff 定理) 设T 是环域A 到自身之上的一个保面积的同胚，它把A 的两个边界均映为自身. 如果T 是扭转的，则T 在A 中至少有两个不动点.

丁伟岳[8] 对Poincaré-Birkhoff 定理作了如下推广：

定理 1.5.7 设D_i 表示圆盘

$$r < R_i, \quad i = 1, 2.$$

设$T: A \to T(A) \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 是一保面积同胚，如果

(i) T 是扭转映象.

(ii) 存在一个保面积同胚$T_0: \overline{D}_2 \to \mathbb{R}^2$ 是T 的扩张. 即$T_0|_A = T$.

(iii) $0 \in T_0(D_1)$.

则T 在A 中至少有两个不动点.

在应用定理1.5.7 时，常常遇到T 是在整个$\mathbb{R}^2$ 上定义的保面积同胚 这时定理1.5.7 的条件(ii) 变得十分简单. 即有

定理 1.5.8 设$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是保面积同胚. 如果T 在环域A 上是扭转的且

$$0\in T(D_1),$$

则T 在A 中至少有两个不动点.

§ 1.6 含参方程的解集连通理论

设X 是一个实Banach 空间，$I=[-1,1]^n\subset\mathbb{R}^n, f:I\times X\to X$ 为非线性算子. 考察方程

$$f(\lambda,x)=0, \tag{6.1}$$

关于含参方程(6.1), 已有许多重要的隐函数定理和分歧定理. 本节着重讨论(6.1) 的解集的连通性，包括两部分：

1. 解集为连通集；
2. 解集中含有连通分支.

这节内容在本书中起着相当重要的作用. 因为无论在第三章讨论非一致渐近线性问题还是在第四章用变分方法讨论强共振问题时都要用到它.

1.6.1 解集为连通集的充分条件

先介绍0-epi 映象的概念.

设X, Y 均为实Banach 空间，$U\subset X$ 是一个有界开集. $f:\overline{U}\to Y$ 连续且对$\forall x\in\partial U, f(x)\neq 0$. 如果对任意紧连续映象$h:\overline{U}\to Y, h$ 满足$\forall x\in\partial U, h(x)=0$, 非线性方程

$$f(x)=h(x)$$

均有解$x \in U$. 则称f 为0-epi 映象.

例 1 设$f_0 = Id - F : \overline{U} \to X$ 为紧连续且$\forall x \in \partial\Omega, x \neq F(x)$. 进一步设

$$\deg(Id - F, U, 0) \neq 0,$$

则f_0 为0-epi 映象.

事实上，对于任意满足：$\forall x \in \partial U, h(x) = 0$ 的$h : \overline{U} \to X$. 由于$\deg(Id - (F + h), U, 0) = \deg(Id - F, U, 0) \neq 0$, 故$f_0(x) = h(x)$ 在U 中必有解.

0-epi 映象有如下性质.

性质 1 设$U \subset X$ 是一个有界开集，$f : \overline{U} \to Y$ 为0-epi 映象，$h : \overline{U} \times [0,1] \to Y$ 是紧连续映象. 假设$\forall x \in \partial U$, $h(x, 0) = 0$,

$$\forall x \in \partial U \quad 及 \quad \forall t \in (0, 1), \quad 有\ h(x, t) \neq f(x),$$

则映象g：$\overline{U} \to Y$

$$g(x) = f(x) - h(x, 1)$$

也是0-epi 的.

性质 2 设$U \subset X$ 是一个有界开集，$f : \overline{U} \to Y$ 是0-epi 映象且f 为proper 映象，则0 为$\mathrm{Im} f$ 的内点.

性质3 设$U \subset E$ 是一个有界开集，$f : \overline{U} \to Y$ 是0-epi 映象. 设V_1, V_2 为两个不相交的开集且使得$f^{-1}(0) \subset V_1 \cup V_2 \subset U$, 则$f|_{V_1}$ 与$f|_{V_2}$ 中至少有一个是0-epi 映象.

下面我们给出由0-epi 映象f 所作出的方程

$$f(x) = 0 \tag{6.2}$$

的解集为连通集的一个充分条件.

定理 1.6.1[27] 设$f : \overline{U} \to Y$ 为0-epi 映象且设f 为proper 映象. 假设对$\forall \varepsilon > 0$ 及$\forall y \in f^{-1}(0)$, 均存在紧连续映象族$h_\varepsilon : \overline{U} \to Y$ 使

(i) $h_\varepsilon(y) = 0$;

(ii) $\|h_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, $\forall x \in U$;

(iii) 方程 $f(x) = h_\varepsilon(x)$ 的解集 ε- 链着 (ε-chained).

则$f^{-1}(0)$ 是一个非空、连通的紧集. 即$f^{-1}(0)$ 为一个闭联集(continuum).

推论 1 设$g:\overline{U}\to Y$ 为0-epi 映象, $k:\overline{U}\to Y$ 是一个紧连续映象且满足: $\forall x\in\partial U, k(x)=0$. 假设对$\forall\varepsilon>0$ 及$\forall y\in(g-k)^{-1}(0)$, 均存在一个紧连续映象$k_\varepsilon:\overline{U}\to F$ 使

(i) $\|k(x)-k_\varepsilon(x)\|<\varepsilon \quad \forall x\in\overline{U}$;

(ii) 方程 $g(x)=k_\varepsilon(x)+k(y)-k_\varepsilon(y)$ 的解集 ε- 链着(ε-chained).

则$(g-k)^{-1}(0)$ 是一个非空连通的紧集.

推论 2 设$U\subset X$ 是一个非空有界开集. $T:\overline{U}\to X$ 是一个紧连续映象. 假设

(i) $\deg(Id-T,U,0)\neq 0$;

(ii) 存在紧连续映象列$T_n:\overline{U}\to X$ 使

$$\delta_n=\sup_{x\in\overline{U}}\{\|T_n(x)-T(x)\|\}\to 0, \qquad \text{当} \quad n\to\infty;$$

(iii) $x=T_n(x)+y$, $y=x_0-T_n(x_0)$ 在U 中至多有一个解(其中x_0 为方程 $x=T(x)$ 的满足 $\|y\|=\|x_0-T(x_0)\|<\delta_n$ 的任一解);

则不动点集

$$\{x\in U \mid x=T(x)\}$$

为U 中的一个闭联集(continoum).

下例说明定理1.6.1 中的"f 为0-epi 映象" 这个条件不能去掉.

例 2 设$f:[-1,1]\to R$

$$f(x)=|4x^2-1|,$$

则$f^{-1}(0)$ 不是连通集. 但另一方面, 对$\forall y\in f^{-1}(0)$ 及$\forall\varepsilon>0$, 作

$$h_\varepsilon(x)=-\frac{2}{3}\varepsilon|x-y|,$$

$h_\varepsilon(x)$ 满足定理1.6.1 的假设条件(i), (ii), (iii).

最后我们指出：0-epi 映象的概念是由Furi, Martelli 和Vignoli 在文[28] 中首先引人的. 本节内容主要选自[27].

1.6.2 解集中含有连通分支的条件

含单参紧向量场方程的解集含有连通分支的结果可以追溯到 Leray 和Schauder [29], Browder [20] 建立的如下结果.

定理 1.6.2 设X 是一个Banach 空间，$I=[-1,1]\subset \mathbb{R}^1$.$U$ 为 X 的一个有界开集. 设$f:[-1,1]\times\overline{U}\to X$ 紧连续映象且满足

$$x\neq f(\lambda,x),\qquad \forall(\lambda,x)\in[-1,1]\times\partial U,$$
$$\deg\big(Id-f(\lambda,\cdot),U,0\big)\neq 0\qquad 对某\quad \lambda\in[-1,1],$$

则

$$\varphi=\big\{(\lambda,x)\in I\times\overline{U}\mid x=f(\lambda,x)\big\}$$

中含有一条连结$\varphi_{-1}=\varphi\cap(\{-1\}\times X)$ 与$\varphi_{+1}=\varphi\cap(\{1\}\times X)$ 的连通分支.

由定理1.6.2 不难推出如下结果.

定理1.6.3[21] 设C 为Banach 空间X 的非空有界闭凸集. $K:[\alpha,\beta]\times C\to C,(\alpha<\beta)$, 是紧连续映象. 则集合

$$S_{\alpha,\beta}=\big\{(s,x)\in[\alpha,\beta]\times C\mid K(s,x)=x\big\}$$

中包含一条连接$\{\alpha\}\times C$ 与$\{\beta\}\times C$ 的连通分支.

由点集拓扑学我们知道：拓扑空间E 的子集C 分离E 的子集 A 和B 是指：存在E 的两个不相交的开集U 和V, 使$A\subseteq U,B\subseteq V$ 且$U\cup V=E\backslash C$. 集合A 与B 在E 中分离是指：空集分离A 和B.

于是，定理1.6.2 可以等价地写成如下.

定理 1.6.4 在定理1.6.2 的假设下，φ_{-1} 与φ_{+1} 不在φ 中分离.

利用拓扑知识及定理1.6.4 不难证明如下.

定理 1.6.5 设定理1.6.2 的全部假设成立. 进一步, 假设$g: \varphi \to \mathbb{R}^1$ 是一个连续映象且满足$g(\varphi_{-1}) \subseteq \mathbb{R}_-, g(\varphi_{+1}) \subseteq \mathbb{R}_+$, 则$g(\lambda, x) = 0$ 在φ 中有解.

下面讨论含多参紧向量场方程的情形.

记$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $I^n = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. 设$U$ 为Banach空间X 中的一个有界开集, $f: I^n \times \overline{U} \to X$ 是一族紧向量场且f 在$I^n \times \partial U$ 上不取零值. 记

$$f_\lambda(\cdot) = f(\lambda, \cdot): \overline{U} \to X,$$

再记

$$\varphi = \{(\lambda, x) \in I^n \times \overline{U} \mid f(\lambda, x) = 0\},$$
$$\varphi_i^{\pm} = \{(\lambda, x) \in \varphi \mid \lambda_i = \pm 1\} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是, 有如下重要结果.

定理 1.6.6 设$f: I^n \times \overline{U} \to X$ 是一族紧向量场且f 在$I^n \times \partial U$ 上不取零值. 如果

$$\deg(f_\lambda, U, 0) \neq 0 \qquad \text{对某} \quad \lambda \in I^n,$$

则下列结论成立:

(i) 如果$C_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为φ 的闭子集且C_i 分离φ_i^+ 与φ_i^-, 则$\cap_{i=1}^n C_i \neq \phi$.

(ii) 如果$g_i: \varphi \to \mathbb{R}, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 连续且使得$g_i(\varphi_i^+) \subset \mathbb{R}^+$ 而$g_i(\varphi_i^-) \subset \mathbb{R}^-$, 则$\cap_{i=1}^n g_i^{-1}(0) \neq \phi$. 即映象$g = (g_1, \cdots, g_n): \varphi \to \mathbb{R}^n$ 在φ 中至少有一个零点.

证明见[22, 定理1.1]

近年来，对含参方程解集结构的研究工作越来越多. 参数空间不再局限于$\mathbb{R}^n$, 含参映象也不再局限于全连续场. 有兴趣的读者可参看Bartsch [25], Lze, Massabo, Pejsachowicz 和Vignoli [23] 及Fitzpatrick 和Pesjsachowcz [24] 等.

§ 1.7 延拓定理

连续同伦方法是处理非线性微分方程解的存在性问题的最常见、最重要的方法之一. 它的核心思想是通过证明某特定同伦方程族的所有可能解有一个先验界，来保证原问题的可解性. 本节主要介绍下列问题

(i) Loray-Schauder 原理.

(ii) Mawhin 延拓定理.

1.7.1 Leray-Schauder 原理

定理 1.7.1[13] 设X 是一个Banach 空间. $T: X\times[0,1]\to X$ 为紧连续映象，且对$\forall x\in X, T(x,0)=0$. 假设存在一个常数$M>0$, 使方程

$$x=T(x,\sigma)$$

的所有解$(x,\sigma)\in X\times[0,1]$, 均有

$$\|x\|_X\le M,$$

则由$T_1x=T(x,1)$ 给出的X 到自身的映象T_1 有一个不动点.

作为定理1.7.1 的一个特殊情形，我们有如下

定理 1.7.2[13] 设T 是Banach 空间X 到自身的紧连续映象. 又设存在一个常数$M>0$, 使方程

$$x=\sigma Tx,\qquad \sigma\in[0,1],\qquad x\in X$$

的所有解$(x,\sigma)\in X\times[0,1]$ 均满足

$$\|x\|_X\le M,$$

则T 有一个不动点.

注 在定理1.7.2 的条件下. 若令

$$C=\{x\in X\mid \|x\|_X\le M\},$$

则由定理1.6.3, 集合

$$S=\{(x,\sigma)\in X\times[0,1]\mid x=\sigma Tx\}$$

中含有一支连接$C\times\{0\}$ 与$C\times\{1\}$ 的连通分支.

在定理1.7.1 的条件下, 也有类似结论.

1.7.2 Mawhin 延拓定理

设X 和Z 均为实赋范向量空间, $L:D(L)\subset X\to Z$ 是一个0 指标的Fredholm 算子. 由线性泛函分析可知, 存在投影$P:X\to X,Q:Z\to Z$ 使$\mathrm{Im}\ P=\ker L$ 而$\ker Q=\mathrm{Im}L$. 进一步, $L|_{D(L)\cap\ker P}$ 可逆, 且记$(L|_{D(L)\cap\ker P})^{-1}=K$. 设$\Omega$ 为X 中的一个有界开集且满足: $D(L)\cap\Omega\ne\phi$. 记Ω 的闭包为$\overline{\Omega}$.

设E 是一个度量空间, $G:E\to Z$ 是一个映象. G 为L- 紧是指: 映象$QG:E\to Z$ 及$K(1-Q)G:E\to X$ 为E 上的紧映象(即在E 上连续且$QG(E)$ 及$K(Id-Q)G(E)$ 均为Z 的相对紧集). 设$\overline{G}:X\to Z$. $\overline{G}$ 为L- 全连续是指: $\overline{G}$ 在X 的任意有界子集$\overline{E}$ 上为L- 紧的.

定理 1.7.3 设$F=L-N$, N: $\overline{\Omega}\to Z$ 为L- 紧. 设$\widetilde{F}:(D(L)\cap\overline{\Omega})\times I\to Z$

$$\widetilde{F}(x,\lambda)=Lx+G(x,\lambda),$$

其中$G:\overline{\Omega}\times I\to Z, L$- 紧，$I=[0,1]$, 同时$\widetilde{F}(\cdot,1)=F$. 如果下列条件成立

(i) $0\notin\widetilde{F}((D(L)\cap\partial\Omega)\times[0,1))$;

(ii) $D_L(\widetilde{F}(\cdot,0),\Omega)\neq 0$.

则

$$F(x)=0 \tag{7.1}$$

在$D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

注 D_L 表示重合度(coincidence degree).

定理1.7.3 结合Borsuck 定理如下有趣的存在性结果.

定理 1.7.4 设$0\in\Omega$ 且Ω 关于0 点对称. $F=L-N$ 而N 在$\overline{\Omega}$ 上L- 紧. 更设$Fx\neq\mu F(-x)$ 对$\forall(x,\mu)\in(D(L)\cap\partial\Omega)\times(0,1]$. 则方程(7.1) 在$D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

定理1.7.3 的一个相当有用的特殊情形，先记

$$C_L(\Omega)=\left\{F:D(L)\cap\overline{\Omega}\to Z\,\middle|\,\begin{array}{l}F=L+G,\\ G:\overline{\Omega}\to z \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 上 } L-\text{紧}\\ \text{且 } 0\notin F(D(L)\cap\partial\Omega)\end{array}\right\}.$$

定理 1.7.5 设$H\in C_L(\Omega), F=L-N$, $N:\overline{\Omega}\to Z$ 为L- 紧且满足

(i) $\lambda Fx+(1-\lambda)Hx\neq 0\quad\forall(x,\lambda)\in(D(l)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$;

(ii) $D_L(H,\Omega)\neq 0$;

则方程(7.1) 在$D(L)\cap\partial\Omega$ 中至少有一个解.

下面我们在$C_L(\Omega)$ 中寻找特殊的H, 以便定理1.7.5 的条件(ii) 能被满足.

定理 1.7.6 设$F=L-N, N:\overline{\Omega}\to Z$ 为L- 紧. 设$H\in C_H(\Omega)$ 在$\overline{\Omega}$ 上是1-1 对应且存在$z\in H(D(L)\cap\Omega)$, 使

$$\lambda Fx+(1-\lambda)(Hx-z)\neq 0$$

对$\forall(x,\lambda)\in(D(L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$ 成立，则方程(7.1) 在$D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

定理 1.7.7 设$F=L-N, N\colon \overline{\Omega}\to Z$ 为L- 紧. 设$A:X\to Z$ 为L- 全连续且

(i) $\ker(L-A)=\{0\}$;

(ii) $\forall(x,\lambda)\in(D(L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$,

$$Lx-(1-\lambda)Ax-\lambda Nx\neq 0.$$

又设$0\in\Omega$, 则方程

$$Lx=Nx \tag{7.2}$$

在$D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

推论 设$F=L-N,\ N:\overline{\Omega}\to Z$ 为L- 紧. 如果$\ker L=\{0\},0\in\Omega$ 且

$$Lx-\lambda Nx\neq 0$$

对$\forall(x,\lambda)\in(D(L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$ 成立. 则定理1.7.7 的结论成立.

现在再讨论定理1.7.5 在$\ker L\neq\{0\}$ 时的几个特殊情形.

定理 1.7.8 设$F=L-N$, N 在$\overline{\Omega}$ 上L- 紧. 设$G\colon \overline{\Omega}\to Y$ 在$\overline{\Omega}$ 上L- 紧. 而Y 为Z 的有限维向量子空间使得$Z=\operatorname{Im}L\oplus Y$. $\oplus$ 表示代数直和. 设下列条件同时成立

(i) $Lx-(1-\lambda)G(x)-\lambda Nx\neq 0\ \forall(x,\lambda)\in(D(L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$;

(ii) $Gx\neq 0\quad\forall x\in\ker L\cap\partial\Omega$;

(iii) $D_0(G|_{\ker L},\ \Omega\cap\ker L),\neq 0$;

(其中D_0 表Brouwer 度)

则$Lx=Nx$ 在$D(L)\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

定理 1.7.9 设$F=L-N,N$ 在$\overline{\Omega}$ 上L- 紧. 假设下列条件同时成立:

(i) $Lx-\lambda Nx\neq 0\quad\forall(x,\lambda)\in((D(L)\backslash\ker L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$;

(ii) $Nx \notin \operatorname{Im} L \quad \forall x \in \ker L \cap \partial\Omega$;

(iii) $D_0\left(QN_{\ker L}, \Omega \cap \ker L\right) \neq 0$ 其中 $Q: Z \to Z$ 为满足 $\ker Q = \operatorname{Im} L$ 的连续投影；$QN_{\ker L}$ 表示QN 在 $\ker K \cap \overline{\Omega}$ 上的限制.

则方程$Lx = Nx$ 在$D(L) \cap \overline{\Omega}$ 中至少有一个解.

定理1.7.3 至定理1.7.9 及其证明可参见[16].

当$X = Z$ 且均为Hilbert 空间时，有如下延拓定理.

定理 1.7.10 设$L: D(L) \subset H \to H$ 是一个0 指标的Fredholm 算子 (L 的右逆为K), 这里H 是Hilbert 空间. 设$F: H \to H$ 是一个单调次连续算子.

如果存在一个线性的α 单调算子$A: H \to H$ 及一个正数$\rho > 0$, 使下列条件满足

(i) $K\overline{Q}F$ 与$K\overline{Q}A$ 在$\overline{B}(\rho)$ 上紧. 其中$\overline{B}(\rho) = \{u \in H \mid \|u\|_H \leq \rho\}$ 而$\overline{Q}: H \to \operatorname{Im} L$ 为直交投影；

(ii) $F(\overline{B}(\rho))$ 为有界集；

(iii) $\forall \lambda \in [0,1)$ 及$\forall u \in D(L) \cap \partial B(\rho)$, 有

$$Lu - (1-\lambda)Au - \lambda Fu \neq 0.$$

则方程$Lu - Fu = 0$ 在$D(L) \cap \overline{B}(\rho)$ 中至少有一个解.

§ 1.8 变分方法

变分理论的内容非常丰富，特别是近二十年来又有了重大进展. 想了解全貌的读者可参阅专著[2]. 这里仅引述以后诸章所必需的个别结论.

1.8.1 无约束极值点

设$f : X \to I\!R^1 \cup \{+\infty\}, f \not\equiv +\infty$. 其中$X$ 是一个Banach 空间. 求$\min\{f \mid x \in X\}$.

当$\dim X < +\infty$ 时，若有条件

(1) f 下半连续，即$x_n \to x_0 \Longrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$;

(2) f 是强制的，即$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$,

则f 必定取到极小值点.

当$\dim X = +\infty$ 时，因无穷维空间中的有界点列未必有收敛子列，故上述结论不再成立. 为了给出在∞ 维空间的推广. 先引进两个概念.

$f : X \to I\!R^1 \cup \{+\infty\}$ 称为弱下半连续的，是指：$x_n \overset{弱}{\rightharpoonup} x_0 \Longrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$.

X 中的一个子集M 称为是弱闭的，是指：$x_n \in M$, $x_n \overset{弱}{\rightharpoonup} x_0 \Longrightarrow x_0 \in M$.

定理 1.8.1[2] 设M 是自反Banach 空间X 中的一个弱闭非空子集，又设$f : M \to I\!R^1 \cup \{+\infty\}$, $f \not\equiv +\infty$ 是弱下半连续的强制函数. 则f 在M 上达到极小点.

注 1 弱下半连续蕴含了下半连续；但反过来一般不真.

注 2 当$\dim X < +\infty$ 时，弱下半连续等价于下半连续.

注 3 设X 为一个自反的Banach 空间，M 为X 的弱闭凸子集；$f : M \to I\!R^1 \cup \{+\infty\}$ 凸，则f 弱下半连续等价于下半连续.

结合定理1.8.1 及注3 可得到：

定理 1.8.2[2] 设X 是一个自反的Banach 空间，$f : X \to I\!R^1 \cup \{+\infty\}, f \not\equiv +\infty$, 下半连续且凸，并满足强制性条件，则$f$ 达到极小点.

1.8.2 Ekeland 变分原理

Ekeland 变分原理也叫Ekeland 近似极小值点定理，它在不需要空间紧性及泛函凸性的情况下，保证泛函有“近似极小值点”.

定理 1.8.3[17] 设(E,ρ) 是一个完备的度量空间，$f: E \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, 且$f \not\equiv +\infty$, 是有下界的下半连续函数. 又设有$\varepsilon > 0$以及$x_\varepsilon \in E$ 使得

$$f(x_\varepsilon) < \inf_{x \in E} f(x) + \varepsilon,$$

则存在点$y_\varepsilon \in E$, 使得

$$f(y_\varepsilon) \le f(x_\varepsilon), \tag{8.1}$$

$$\rho(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \le 1, \tag{8.2}$$

$$f(x) > f(y_\varepsilon) - \varepsilon\rho(y_\varepsilon, x), \qquad \forall x \ne y_\varepsilon. \tag{8.3}$$

推论 设(E,ρ) 是一个完备度量空间. $f: E \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, 下半连续，有下界且$f \not\equiv +\infty$. 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in E$ 满足:

$$f(x_\varepsilon) < \inf_{x \in E} f(x) + \varepsilon,$$
$$f(x) \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon\rho(x_\varepsilon, x), \qquad \forall x \in E.$$

利用定理1.8.3, 不难推出非常有用的如下结果.

定理 1.8.4[17] 设X 是一个Banach 空间，$\varphi: X \to \mathbb{R}^1$ 是一个在X 上可微且有下界的泛函，则对任意φ 的极小化序列$\{u_k\}$, 存在φ 的一个极小化序列$\{v_k\}$, 使得

$$\varphi(v_k) \le \varphi(u_k),$$
$$|u_k - v_k| \to 0 \qquad 当 \quad k \to \infty,$$
$$|\varphi'(v_k)| \to 0 \qquad 当 \quad k \to \infty.$$

证明见[17, 推论4.1].

现设X 是一个Banach 空间，$f \in C^1(X, \mathbb{R})$. 为了在X 上考察f 的极小值，我们把“紧性”条件添加到f 自身上去.

Palais-Smale 条件

设$f \in C^1(X,\mathbb{R})$, 称f 满足[P. S.] 条件，是指：$\forall \{p_n\} \subset X$

$$\left.\begin{array}{l} f(p_n)\ \text{有界} \\ df(p_n) \to \theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \{p_n\}\ \text{有收敛子列}.$$

定理 1.8.5[2] 设X 是一个Banach 空间，$f \in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足[P. S.] 条件，且f 下半有界，则f 达到极小值. 即存在$p_0 \in X$, 使得

$$f(p_0) = \inf_{p\in X} f(p) \quad \text{并且} \quad df(p_0) = \theta.$$

注 4 在定理1.8.5 中，不需要假定f 是强制的.

1.8.3 极大极小原理

先引进环绕的概念.

设X 是一个Banach 空间，$Q \subset X$ 是一个有边的闭Banach 流形，其边界为∂Q. 又设S 是X 中的一个闭子集. 称∂Q 与S 是环绕的，是指：

(i) $\partial Q \cap S = \emptyset$;

(ii) 对任意连续的$\varphi : Q \to X$, $\varphi|_{\partial Q} = Id|_{\partial Q}$ 均有

$$\varphi(Q) \cap S \neq \emptyset.$$

环绕的例子很多. 下面列举的例子是以后要用到的.

例 1 设Ω 是X 中原点θ 是一个开邻域，$S = \partial\Omega$. 设$x_0 \notin \Omega$, 令

$$Q = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in [0,1]\},$$

则$\partial Q = \{\theta, x_0\}$. 由连通性，$\partial Q$ 与S 环绕. 见图1.8.1.

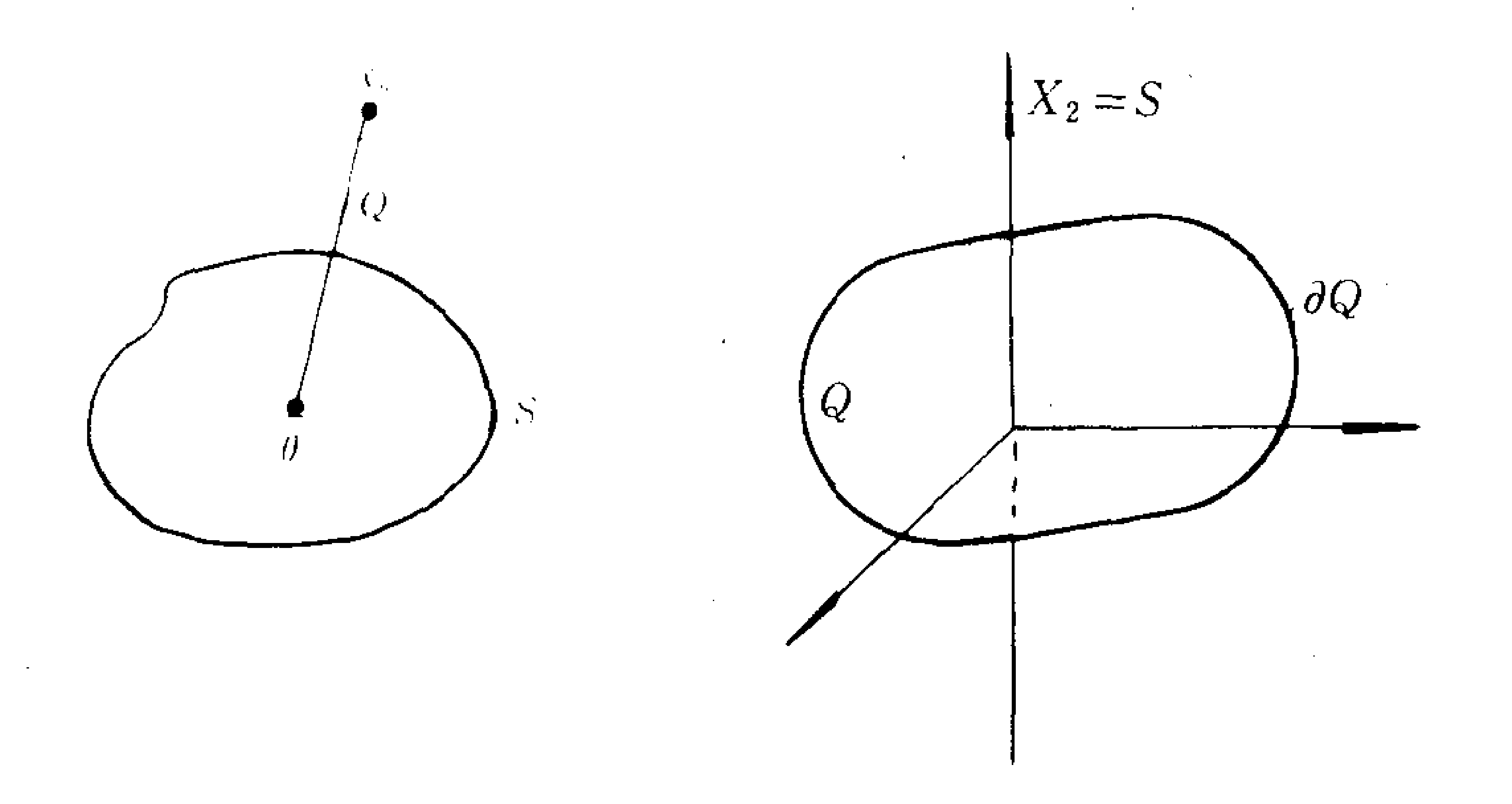


图 1.8.1 图 1.8.2

例 2 设X 是一个Banach 空间，X_1 是它的一个有穷维线性子空间，X_2 是X_1 的补空间：

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

令

$$S = X_2,$$

$$Q = B_R \cap X_1,$$

其中$B_R = \{x \in X \mid \|x\|_X \le R\}$, 则$\partial Q = \{x \in X_1 \mid \|x\| = R\}$. 可以证明$S$ 与∂Q 环绕. 见图1.8.2.

例 3 设X 是一个Banach 空间，X_1 是一个有穷维线性子空间，X_2 是X_1 的补空间：

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

又设$\vec{e} \in X_2, \|\vec{e}\| = 1$. 设$R_1, R_2, \rho > 0$. 令

$$S = X_2 \cap \partial B_\rho,$$

$$Q = \{u + t\vec{e} \mid u \in X_1 \cap B_{R_2},\ t \in [0, R_1]\},$$

其中B_r是以θ为中心，$r>0$为半径的球；则当$R_1>\rho$时，S与∂Q环绕. 见图1.8.3.

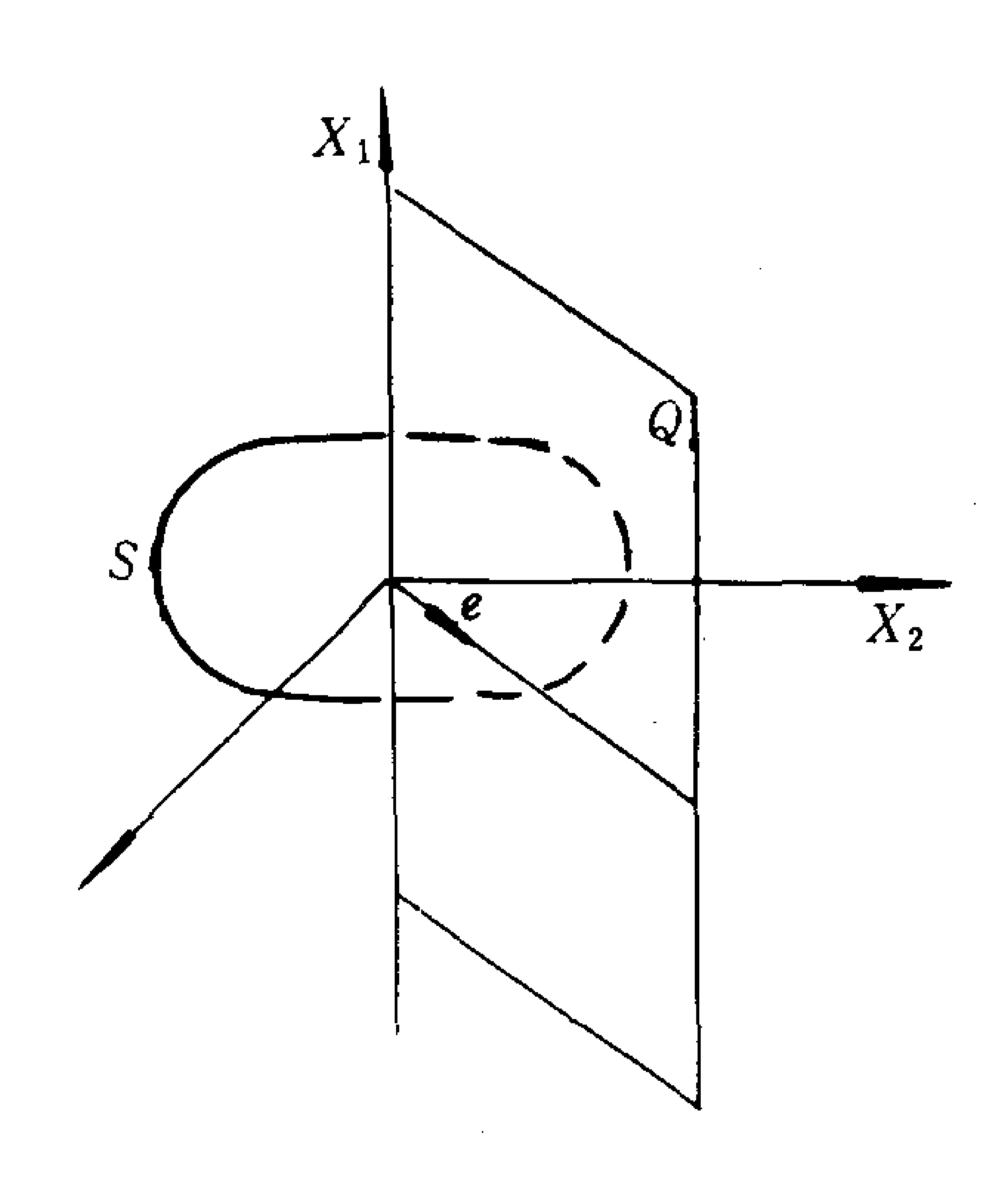


图 1.8.3

定理 1.8.6[2] 设X是一个Banach 空间，$f\in C^1(X,\mathbb{R}^1)$满足[P.S.] 条件且f在∂Q与S上的值可以分离，即有实数$\beta>\alpha$, 使

a) $$\sup_{x\in\partial Q} f(x)\le\alpha, \tag{8.4}$$

b) $$\inf_{x\in S} f(x)\ge\beta, \tag{8.5}$$

其中∂Q与S环绕，则f必有一个临界值$C\ge\beta$.

结合定理1.8.6 及例1 立即得到著名的山路引理(Montain pass lemma). 陈述如下：

定理 1.8.7[2,3,4] 设$f\in C^1(X,\mathbb{R}^1)$, f满足[P.S.] 条件；又设

$\Omega \subset X$ 是θ 的一个开邻域，$x_0 \notin \Omega$. 那么当

$$f(x_0), f(\theta) \leq 0,$$
$$f|_{\partial\Omega} \geq \alpha > 0$$

时，$C = \inf_{n\in\Phi} \sup_{t\in[0,1]} f(h(t))$ 是f 的一个正临界值，$c \geq \alpha$; 其中

$$\Phi = \{h \in C([0,1], X) \mid h(0) = \theta,\ h(1) = x_0\},$$

即Φ 由X 中连接θ 与x_0 的一切道路组成.

对于非线性共振问题所对应的泛函，通常的[P. S.] 条件一般不满足. 为了克服这个困难，人们引进了其它一些紧性条件. 如 Bartolo, Benci, Fortunato [31] 提出下列[C] 条件

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} \text{若 } \{x_n\} \text{ 与 } f(x_n) \text{ 都有界} \\ f'(x_n) \to \theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \{x_n\} \text{ 有收敛子列.}$$

(2) $\exists$ 常数$\alpha, R > 0$ 使得$\|f'(x)\| \cdot \|x\| \geq \alpha$, 当$\|x\| > R$.

又如Solimini [30] 引进[P. S.]' 条件，详见第四章.

对于没有[P.S.] 条件的泛函，我们常常讨论渐近临界值的存在性. 现在我们给出这方面的一个结果.

设E 是一个Hilbert 空间，E 的范数和内积分别记为$\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$.

设$\{e_n\}$ 为E 的一组标准正交基，记$E_n = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 设$P_n : E \to E_n$ 为直交投影，$Q_n = Id_E - P_n$.

给定$\overline{u} \in E_n, r \in \mathbb{R}^+$, 记

$$B_n \triangleq B_n(\overline{u}, r) = \{u \in E_n \mid \|u - \overline{u}\| < r\}.$$

再记

$$H_n = \{\eta : E \to E \mid \eta(u) = u,\ \forall u \in \partial B_n\}.$$

令

$$\mathcal{A}_n^1=\{A\subset E\mid \exists\eta\in H_n \text{ 使 } A=\eta(\overline{B}_n)\},\tag{8.6}$$

$$\mathcal{A}_n^2=\{A\subset E\mid A\text{紧且}\forall\eta\in H_n\text{有}\,\eta(A)\cap E_n^{\perp}\neq\phi\}.\tag{8.7}$$

易见$\mathcal{A}_n^1\subset\mathcal{A}_n^2$. 设

$$c_n^i=\inf_{A\in\mathcal{A}_n^i}\sup_A I,\qquad i=1,2,$$

其中$I\in C^1(E,\mathbb{R})$. 则由$\mathcal{A}_n^1\subset\mathcal{A}_n^2\Longrightarrow c_n^2\leq c_n^1$. 下面给出一个没有[P.S.] 条件的鞍点定理.

定理 1.8.8[30]　设$i=1,2$. $c_n^i>\sup\limits_{\partial B_n}I$. 则对任意满足$\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{A_k}I=c_n^i$ 的集合列$\{A_k\}\subset\mathcal{A}_n^i$, 存在点列$\{u_n\}\subset E$, 使得

(i) $$\lim_{k\to\infty}d(u_k,A_k)=0,\tag{8.8}$$

(ii) $$\lim_{k\to\infty}I'(u_k)=0,\tag{8.9}$$

(iii) $$\lim_{k\to\infty}I(u_k)=c_n^i.\tag{8.10}$$

注 5　若$\inf_{E_n^{\perp}}I>\sup_{\partial B_n}I$, 则$c_n^i>\sup\limits_{\partial B_n}I$.

注 6　(8.9) 和(8.10) 表明, I 有一个渐近临界值c_n^i (c 是 I 的渐近临界值是指: $\exists\{u_n\}\in E$, 使得$I'(u_n)\to\theta$ 而$I(u_n)\to c$).

附注 I

1.　关于弱解的概念在本书中是重要的. 我们将在以后各章中, 根据不同的问题分别给出其定义.

2.　设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界区域, $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件是指: 对$\forall u\in\mathbb{R}$, $f(\cdot,u)$ 在Ω 上可测; 对a.e.

$x \in \Omega, f(x,\cdot)$ 在$I\!R$ 上连续. Carathéodory 条件在本书中将多次用到. 以后我们还将引进：对$L^p(\Omega)$ 的Carathéodory 条件及位势Carathéodory 函数等概念. 与Carthéodory 条件有关的性质，见[2], [3], [4].

3. Poincaé-Bohl 定理以及由它导出的锐角原理见[3], 在证明解的存在性时是重要的. 还有Borsuk 定理等，限于篇幅，本章未能介绍.

第二章　线性方程的不跨特征值扰动

设L 为§1.1.1 中定义的某线性微分算子，$\{\lambda_k\}$ 为其特征值. 对于半线性方程

$$Lu + g(x,u) = h(x), \qquad u \in D(L)$$

(其中$u:\Omega\to I\!R, g:\Omega\times I\!R\to I\!R$), 记

$$g_*(x) = \liminf_{|s|\to\infty}\frac{g(x,s)}{s}, \qquad g^*(x) = \limsup_{|s|\to\infty}\frac{g(x,s)}{s}.$$

若存在 $k_0 \in Z\!\!Z$, 使$\forall x\in\Omega$, 有

$$\lambda_{k_0} \le g_*(x) \qquad \text{且} \quad g^*(x) \le \lambda_{k_0+1},$$

且严格不等式在Ω 的一个正测度上成立，则称g 为线性方程$Lu = h$ 的不跨特征值扰动.

本章主要讨论带有不跨特征值扰动的方程的解的存在性和唯一性. 我们将运用各种不同的工具逐步实现扰动项由渐近一致向渐近非一致的过渡.

§ 2.1　不跨特征值问题研究概况

2.1.1 Dolph 定理

由定理1.1.3 我们知道，对于线性边值问题

$$\Delta u + ru = h, \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

(其中$h \in L^2(\Omega), r$ 为常数). 当r 不是$-\Delta$ 的特征值时, 即$\exists k \in \mathbb{N}$, 当r 满足

$$\lambda_k < r < \lambda_{k+1} \tag{1.3}$$

时, 对任意$h \in L^2(\Omega)$, (1.1) - (1.2) 总存在唯一解.

早在1949 年, Dolph 就研究半线性椭圆方程Dirichlet 边值问题

$$\Delta u + g(u) = h, \qquad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1.5}$$

并建立了如下存在唯一性结果

定理 2.1.1 如果存在正数$\varepsilon > 0$ 及自然数k, 使对任意$s \in \mathbb{R}$, 有

$$\lambda_k + \varepsilon \leq g'(s) \leq \lambda_{k+1} - \varepsilon, \tag{1.6}$$

则(1.4) - (1.5) 存在唯一解.

证明 定义一个线性算子$L : W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Lu = -\Delta u - ru.$$

再定义$N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$,

$$N(u) = g(u) - ru - h(x),$$

由题设不难推出, $\forall u, v \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$, 均有

$$\|Nu - Nv\|_{L^2} \leq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k - 2\varepsilon}{2}\|u - v\|_{L^2}. \tag{1.7}$$

再因L 为自伴的, L 的特征值为$\mu_i = \lambda_i - r$, 满足

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k = \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{2} < 0 < \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2} = \mu_{k+1} \leq \cdots,$$

故

$$\|L^{-1}\| = \frac{2}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}. \tag{1.8}$$

于是由压缩映象原理(见定理1.5.1), $u = L^{-1}N(u)$ 有唯一的不动点. ∎

若将定理2.1.1 中的条件(1.6) 削弱为

$$\lambda_k < g'(+\infty), \qquad g'(-\infty) < \lambda_{k+1},$$

其中$g'(+\infty) = \lim_{s\to+\infty} g'(s), g'(-\infty) = \lim_{s\to\infty} g'(s)$, 则有如下结果.

定理 2.1.2 假设$g'(+\infty), g'(-\infty)$ 均存在且为有限数, 同时满足: 存在自然数k, 使

$$\lambda_k < g'(+\infty)、 \qquad g'(-\infty) < \lambda_{k+1} \tag{1.9}$$

成立, 则(1.4) - (1.5) 至少有一个解.

证明 由题设(1.9) 可知, $\exists\varepsilon$:

$$0 < \varepsilon < \min\{g'(\pm\infty) - \lambda_k, \lambda_{k+1} - g'(\pm\infty)\}$$

及依赖于ε 的正数A, 使当$s \in (-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$, 有

$$\lambda_k + \varepsilon \le g'(s) \le \lambda_{k+1} - \varepsilon. \tag{1.10}$$

作一个C^1 函数g_1: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, g_1$ 在$(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ 上等于g, 而在$[-A, A]$ 上为过$(-A, g(-A)), (0, 0)$ 及$(A, g(A))$ 三点, 而斜率属于$[\lambda_k + \varepsilon, \lambda_{k+1} - \varepsilon]$ 的光滑内插. 记

$$g_2 = g - g_1,$$

则g_2 在$\mathbb{R}$ 上有界.

现在，沿用定理2.1.1 证明的记号. 可知，(1.4) – (1.5) 等价于

$$u = L^{-1}Nu,$$

即

$$u = L^{-1}[g_1(u) - \gamma u - h] + L^{-1}g_2(u).$$

若记$N_1 u = g_1(u) - \gamma u - h$, 则$L^{-1}N_1$ 为压缩映象. 结合$L^{-1}g_2(u)$ 在$W^{2,2} \cap W_0^{1,2} \subset L^2(\Omega)$ 上一致有界. 可推知：存在一个闭球$\overline{B}(0,R) \subset L^2(\Omega)$, 使

$$L^{-1}N : \overline{B}(0,R) \to \overline{B}(0,R).$$

据Schauder 不动点定理(见定理1.5.5), $u = L^{-1}Nu$ 在$\overline{B}(0,R)$ 中至少有一个不动点. ∎

注 定理2.1.2 证明中出现的$L^{-1}N$ 不再是压缩映象了，因而无法保证解的唯一性.

2.1.2 一个趋势

对于半线性微分方程

$$Lu + g(u) = h$$

的研究，就非线性项g 而言(注：为了简单，这里仅对$g = g(u)$ 的情形讨论), 早期研究是在$g \in C^1$ 且满足

$$\lambda_k < r \le g'(s) \le r' < \lambda_k + 1 \tag{1.11}$$

下进行的. 接着(1.11) 又被削弱为：$g : I\!R^1 \to I\!R^1$ 连续且满足

$$\lambda_k < r \le \frac{g(u) - g(v)}{u - v} \le r' < \lambda_{k+1}, \qquad u \ne v. \tag{1.12}$$

直到1972 年，Mawhim[61] 等在条件：存在$M > 0$, 使

$$\lambda_k < r \le \frac{g(x)}{x} \le r' < \lambda_{k+1}, \qquad \forall |x| \ge M \tag{1.13}$$

下开始工作.

由于在条件(1.11)、(1.12) 及(1.13) 中，均存在常数$r, r' : r \le r'$, 使

$$[r, r'] \subset (\lambda_k, \lambda_{k+1}),$$

故称这类条件为渐近一致条件.

1981 年，Mawhin[64] 等在条件:

$$\begin{cases} \text{存在 } \alpha(x), \beta(x) \in L^\infty(\Omega), \text{使} \\ \lambda_k \le \alpha(x) \le \liminf\limits_{|u|\to\infty} \dfrac{g(x,u)}{u} \le \limsup\limits_{|u|\to\infty} \dfrac{g(x,u)}{u} \le \beta(x) \le \lambda_{k+1} \\ \text{及} \\ \lambda_k < \alpha(x), \beta(x) < \lambda_{k+1} \text{ 均在 } \Omega \text{ 的一个正测集上成立} \end{cases} \tag{1.14}$$

成立的前题下，讨论非线性椭圆方程Dirichlet 问题的解的存在性.

1982 年，丁同仁[33] 在

$$n^2 \le g'(s) \le (n+1)^2 \tag{1.15}$$

下，较完整地解决了半线性Duffing 方程

$$\ddot{x} + g(x) = e(t) \tag{1.16}$$

(其中e 为以2π 为周期的连续函数) 的2π- 周期解的存在性问题.
又如，Omari 和Zanolin [57] 在

$$n^2 \le \frac{g(s)}{s} \le (n+1)^2, \qquad |x| \ge \delta > 0 \tag{1.17}$$

等条件下研究(1.16) 在周期边值条件

$$x(0) - x(2\pi) = \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0 \tag{1.18}$$

下的可解性.

由(1.14), (1.15) 及(1.17) 可以看出，当$|s| \to \infty$ 时$\frac{g(s)}{s}$ 的值可与λ_k, λ_{k+1} 任意靠近，甚至可以"接触" λ_k 和λ_{k+1}. 我们称这类条件为渐近非一致条件. 若$\underline{\lim}_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda_k$, 则称$g$ 非一致渐近λ_k; 若$\overline{\lim}_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda_{k+1}$, 则称$g$ 非一致渐近λ_{k+1}.

近年来的一个发展动态是在由原函数给出的条件下进行研究，如丁同仁和Zanolin [65]、柳彬[37] 等在

$$n^2 < \frac{2G(x)}{x^2} < (n+1)^2 \quad |x| \geq \delta > 0 \tag{1.19}$$

(其中$G(x) = \int_0^x g(s)ds$) 等条件下研究Duffing 方程周期解的存在性. Figueiredo [53] 亦在由原函数给出的条件下研究椭圆方程Dirichlet 问题. 值得注意的是，条件(1.19) 已允许$\frac{g(x)}{x}$ 的渐近值跨越有限个或无穷多个特征值.

2.1.3 方程组的情形

在§2.1.2 中，已经指出从渐近一致条件逐步向渐近非一致条件过渡的发展趋势. 这种趋势也是非线性方程组可解性问题及跨特征值扰动问题(见第三章) 的发展大趋势之一. 这里，我们再简介一下方程组的这种趋势.

Lazer 等[46] 在条件

$$(L)\begin{cases} \text{存在两个 } n\times n \text{对称矩阵 } A, B, \text{使} \\ \qquad A \leq \dfrac{\partial^2 G(a)}{\partial x_i \partial x_j} \leq B \qquad \forall a \in I\!R^n \\ \text{及} \\ \qquad N_k^2 < r_k \leq \mu_k < (N_k+1)^2 \\ \text{其中 } \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq\leq \gamma_n \text{为 } A \text{ 的特征值} \\ \qquad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \text{为 } B \text{ 的特征值} \\ \qquad N_k \in I\!N \end{cases}$$

下研究方程组

$$U''(t) + \mathrm{grad}\, G(U(t)) = p(t) \tag{1.20}$$

的2π- 周期解的存在性. 其中$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ 为C^2 函数, $p: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ 连续且以2π- 为周期.

与§2.1.2 中类似, 称条件(L) 为方程组的渐近一致条件.

沈祖和[38] 在条件:

$$(L')\quad \begin{cases} \forall\, t \in [0, 2\pi],\ \forall\, u \in \mathbb{R}^n,\ \text{有} \\ N_k^2 < \gamma_k(t,u) < (N_k+1)^2 \\ \delta(t, \|u\|) = \min\limits_{\|v\| \le \|u\|} \left\{ \min\limits_{1 \le k \le n} [v_k(t,v) - N_k^2, (N_k+1)^2 - v_k(t,v)] \right\} \\ \text{且} \displaystyle\int_0^{\infty} \delta(t,s)ds = +\infty \\ \text{其中 } \gamma_k(t,u) \text{ 为 } \left[\dfrac{\partial^2 G(u)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \text{的特征值} \end{cases}$$

下建立(1.20) 的2π- 周期解的存在唯一性定理. 李树杰和冯德兴在与条件(L') 类似的条件下讨论比(1.20) 更为广泛的一类方程组的存在唯一性. 葛渭高和黄先开等均在比(L') 更广泛的条件下获得至少有一个解的结果.

与(L') 类似的条件是方程组的渐近非一致条件.

§ 2.2 抽象方程 • 渐近一致 • minimax 方法

本节在渐近一致条件下, 证明几种类型的半线性微分方程解的存在性和唯一性. 所采用的工具主要有单调算子理论以及通过鞍点约化获得的一个抽象的minimax 定理. 选用这样工具有助于认清不跨特征值扰动的本质.

2.2.1 一个 minimax 定理

设H 是一个Hilbert 空间，其内积为$(\cdot\ ,\ \cdot)$. 设X 和Y 均为H 的闭向量子空间，且满足$H = X \oplus Y$. 记

$$Q : H \to X, \quad R : H \to Y$$

分别为到X 和Y 上的直交投影. 令

$$S = Q - R,$$

则S 为H 上的闭双射且$S^2 = Id_H$.

设$f : H \to \mathbb{R}$ 为一泛函，f 的Gâteaux 导数$\nabla f : H \to H$ 处处有定义且为半连续映象(即对$\forall u, v \in H$, 均有$w - \lim_{t\to 0} \nabla f(u + tv) = \nabla f(u)$). 假设存在常数$m_1, m_2 > 0$, 使

$$\begin{aligned}
&(\nabla f(h_1 + y) - \nabla f(h_2 + y), h_1 - h_2) \\
\leq& - m_1\|h_1 - h_2\|, \qquad h_1, h_2 \in X, \quad y \in Y, \qquad (2.1) \\
&(\nabla f(x + k_1) - \nabla f(x + k_2), k_1 - k_2) \\
\geq& m_2\|k_1 - k_2\|^2, \qquad x \in X, \quad k_1, k_2 \in Y, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

其中$\|\cdot\|$ 表示H 中的范数.

我们将证明如下临界点定理.

定理 2.2.1 设X 和Y 是Hilbert 空间H 的两个闭子空间且$H = X \oplus Y$. 设$f : H \to \mathbb{R}$ 为一泛函，$\nabla f : H \to H$ 存在且半连续. 假设(2.1) 和(2.2) 成立，则f 有唯一的临界点$v_0 \in H$, 使$\nabla f(v_0) = 0$. 进一步，

$$f(v_0) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x + y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x + y).$$

证明 (i) 证明存在v_0 使$\nabla f(v_0) = 0$ 等价于证明方程$\nabla f \circ S(u) = 0$ 可解. 这是因为S 是一个闭双射，v_0 是f 的临界点当

且仅当$u_0 = S^{-1}v_0$ 是方程$\nabla f \circ S(u) = 0$ 的一个解. 下证算子$M \triangleq -\nabla f \circ S$ 满足单调算子锐角原理(定理1.3.3) 的全部条件.

首先M 在H 上处处有定义且半连续. 设u, v 为H 中任意两点, $u = x+y, v = x_1+y_1$. 其中$x = Qu$, $y = Ru$, $x_1 = Qv$, $y_1 = Rv$. 由(2.1), (2.2) 及定理1.3.11 和定理1.3.10, 可推知

$$-f(x_1 - y) + f(x - y) \geq (\nabla f(x - y), -x_1 + x) + \frac{1}{2}m_1\|x_1 - x\|^2, \tag{2.3}$$

$$-f(x - y_1) + f(x_1 - y_1) \geq (\nabla f(x_1 - y_1), -x + x_1) + \frac{1}{2}m_1\|x - x_1\|^2, \tag{2.4}$$

$$f(x - y_1) - f(x - y) \geq (\nabla f(x - y), y - y_1) + \frac{1}{2}m_2\|y - y_1\|^2, \tag{2.5}$$

$$f(x_1 - y) - f(x_1 - y_1) \geq (\nabla f(x_1 - y_1), y_1 - y) + \frac{1}{2}m_2\|y - y_1\|^2. \tag{2.6}$$

以上四式两边相加, 得

$$\begin{aligned}0 \geq &\big(\nabla f(x - y) - \nabla f(x_1 - y_1), x - x_1\big) + \big(\nabla f(x - y) \\ &- \nabla f(x_1 - y_1), y - y_1\big) + m_1\|x_1 - x\|^2 + m_2\|y - y_1\|^2\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\Big(\big(-\nabla f(x - y)\big) - \big(-\nabla f(x_1 - y_1)\big), (x + y) - (x_1 + y_1)\Big) \\ \geq &m_1\|x - x_1\|^2 + m_2\|y - y_1\|^2,\end{aligned}$$

即

$$(Mu - Mv, u - v) \geq \nu\big(\|Q(u - v)\|^2 + \|R(u - v)\|^2\big).$$

其中$\nu = \min\,(m_1, m_2)$. 现在由于$\forall w \in H$, 有

$$\|w\|^2 = \|Qw + Rw\|^2 \leq 2\big(\|Qw\|^2 + \|Rw\|^2\big).$$

于是我们有

$$(Mu - Mv, u - v) \geq \frac{1}{2}\nu\|u - v\|^2, \tag{2.7}$$

即M 是强单调算子. 由(2.7)

$$\big(M(u) - M(0), u - 0\big) \geq \frac{1}{2}\nu\|u\|^2$$

或

$$\begin{aligned}(M(u), u) &\geq \frac{1}{2}\,\nu\|u\|^2 - (M(0),\, u)\\ &\geq \frac{1}{2}\,\nu\|u\|^2 - \|M(0)\|\cdot\|u\|\\ &= \frac{1}{2}\,\nu\|u\|^2 - \|\nabla f(0)\|\cdot\|u\|.\end{aligned}$$

可见对$\forall\, u : \|u\| \geq 2\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\|\nabla f(0)\|$, 均有

$$(Mu, u) \geq 0.$$

利用定理1.3.3, 存在$u_0 : \|u_0\| \leq \frac{2}{\nu}\|\nabla f(0)\|$ 使$Mu_0 = 0$. 进而$v_0 = Su_0$ 满足$\nabla f(v_0) = 0$. 唯一性可由(2.7) 立即推出.

(ii) 下证v_0 是f 的鞍点, 即

$$f(v_0) = \max_{x\in X}\,\min_{y\in Y}\, f(x+y) = \min_{y\in Y}\,\max_{x\in X}\, f(x+y).$$

为此, 利用[44, VI, Prop. 1.6] 中可微泛函的鞍点判别准则. 对于$J(x,y) \triangleq f(x+y)$: 由于

$$\begin{aligned}&x \mapsto J(x,y), \qquad \forall\, y\in Y \quad \text{连续凹};\\ &y \mapsto J(x,y), \qquad \forall\, x\in X \quad \text{连续凸};\\ &\frac{\partial}{\partial x}J(x_0,y_0) = \nabla f(x_0+y_0) = 0;\\ &\frac{\partial}{\partial y}J(x_0,y_0) = \nabla f(x_0+y_0) = \nabla f(v_0) = 0,\end{aligned}$$

可知$v_0 = x_0 + y_0$ 为$J(x,y) = f(x+y)$ 的一个鞍点. ∎

现在，我们对泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}(Au,u) - \varphi(u) \tag{2.8}$$

建立一个mini-max 定理. 其中

$A : D(A) \subset H \to H$ 是一个自伴算子.

$\varphi : H \to \mathbb{R}$ 为一个泛函，φ 的Gâteaux 导数$F = \nabla\varphi$ 为在H 上有定义的连续有界算子.

注意：$u_0 \in H$ 是I 的一个临界点的充要条件为u_0 是I 的Euler-Lagrange 方程

$$Au = F(u) \tag{2.9}$$

的解.

对于A 和F, 我们假定

(H1) $F : H \to H$ 是一个以泛函$\varphi : H \to \mathbb{R}$ 为位势的位势算子，且存在有界自伴算子B_1 和B_2, 使$\forall u, v \in H$, 有

$$\big(B_1(u-v), u-v\big) \leq \big(F(u)-F(v), u-v\big) \leq \big(B_2(u-v), u-v\big). \tag{2.10}$$

(H2) 投影$Q : H \to X$, $R : H \to Y$ 使

$$Q(D(A)) \subset D(A), \qquad R(D(A)) \subset D(A), \tag{2.11}$$

且存在常数$\nu > 0$, 使

$$\big((A - B_1)u, u\big) \leq -\nu\|u\|^2, \quad u \in X \cap D(A), \tag{2.12}$$

$$\big((A - B_2)u, u\big) \geq \nu\|u\|^2, \quad u \in Y \cap D(A). \tag{2.13}$$

定理 2.2.2 设$A : D(A) \subset H \to H$ 是一个自共轭算子，$F : H \to H$ 是泛函$\varphi : H \to \mathbb{R}$ 的位势算子. 若A, F 满足(H1) 和(H2),

则方程$Au=F(u)$ 有唯一解u_0 : $\|u_0\| \leq \frac{2}{\nu}\|F(0)\| \cdot \|S\|$ 且u_0 是泛函(2.8) 的鞍点，即

$$I(u_0)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y} I(x+y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} I(x+y).$$

为了给出证明，我们需要下列两个简单结果.

命题 1 (i) $S|_{D(A)}$ 为一个双射;

(ii) $L \triangleq A\circ S$ 是一个闭算子且

$$D(L)=D(L^*)=D(A).$$

命题 2 设$F:H\to H$ 满足(H1), 则

$$\|F(u)-F(v)\| \leq b\|u-v\|, \tag{2.14}$$

其中 $b=\max(\|B_1\|,\|B_2\|)$.

定理2.2.2 的证明 记$N=(A-F)\circ S=L-F\circ S$. 则方程$Au=F(u)$ 等价于方程$N(u)=0$. 为了证明$N(u)=0$ 有解，我们利用定理1.3.8.

由命题2, $F\circ S$ 是一个连续有界映象. 由命题1, $L=A\circ S$ 是一闭线性算子且

$$L^*=L^*|_{D(L)\cap D(L^*)}\ .$$

现证$-N$ 是一个单调强制算子.

由(H1) 和(H2) 可推知

$$\begin{aligned}&\big(\nabla I(h_1+y)-\nabla I(h_2+y),\ h_1-h_2\big)\\=&(A(h_1-h_2)-(F(h_1+y)-F(h_2+y)),\ h_1-h_2)\\\leq&(A(h_1-h_2)-B_1(h_1-h_2),\ h_1-h_2)\\\leq&-\nu\|h_1-h_2\|^2,\end{aligned}$$

即对$\forall h_1, h_2 \in X \cap D(A)$, $\forall y \in Y$, 有

$$\big(\nabla I(h_1 + y) - \nabla I(h_2 + y),\ h_1 - h_2\big) \le -\nu \|h_1 - h_2\|^2. \tag{2.15}$$

同理对$\forall k_1, k_2 \in Y \cap D(A)$, $\forall x \in X$, 有

$$\big(\nabla I(x + k_1) - \nabla I(x + k_1),\ k_1 - k_2\big) \ge \nu \|k_1 - k_2\|^2. \tag{2.16}$$

用与定理2.2.1 的证法完全类似的方法可以推出

$$\begin{aligned}\big((-\nabla I \circ S(u)) - (-\nabla I \circ S(v)), u - v\big) \ge \frac{\nu}{2}\|u - v\|^2 \\ \forall u, v \in D(N) = D(A),\end{aligned} \tag{2.17}$$

即$-N$ 是一个强单调强制算子. 至此定理1.3.8 的全部条件满足, 故存在$w_0 \in D(A)$ 使$N(w_0) = 0$. 因此$\nabla I(Sw_0) = 0$. 令$u_0 = Sw_0$ 则$Au_0 = F(u_0)$. 进一步

$$\|u_0\| \le \frac{2}{\nu}\|F(0)\| \cdot \|S\|.$$

u_0 为I 的鞍点可仿定理2.2.1 证明B 部分推得. ∎

2.2.2 L^2 空间中的抽象结果

设$\mathbb{R}^s$ 为s 维实欧氏空间, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ 是一个有正Lebesgue 测度的可测区域. 记$H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cong \underbrace{L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)}_{n}, n \ge 1$. 记$LS(\mathbb{R}^n)$ 为$\mathbb{R}^n$ 上的$n \times n$ 对称阵全体.

设$f(\cdot, \cdot): \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 若

(i) 对a.e. $P \in \Omega$, $f(P, \xi)$ 关于ξ 连续;

(ii) 对$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $f(P, \xi)$ 关于P 可测, 则称f 满足Carathéodory 条件.

命题 3 若存在函数$a_j(P) \in L^2(\Omega)$ 及常数$b > 0$, 使$f(P,\xi) = (f_1(P,\xi),\cdots,f_n(P,\xi))$ 满足

$$|f_j(P,\xi)| \leq a_j(P) + b\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|, \qquad j = 1,\cdots,n, \tag{2.18}$$

则由

$$F(u) \triangleq f(P,u(P)), \qquad u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) \tag{2.19}$$

定义的算子F 是将$L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 映入$L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 的有界连续算子.

证明 见[3], [4].

注 由(2.19) 式定义的算子F 通常称为Nemysckii 算子.

如果$f:\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足Carathéodory 条件, 且满足:

(iii) 存在一个函数$G:\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, 使

$$f_j(P,\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi_j}G(P,\xi), \qquad j = 1,\cdots,n,$$

则称f 满足位势Carathéodory 条件.

假定$f(P,\xi)$ 满足下列条件

(H1.1) $f:\Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足位势Carathéodory 条件且$f(P,0) \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$;

(H1.2) 存在两个可交换阵$b_1, b_2 \in LS(\mathbb{R}^n)$, 使

$$\begin{aligned}\big(b_1(\xi-\eta),\xi-\eta\big)_n \leq\ & \big(f(P,\xi)-f(P,\eta),\xi-\eta\big)_n \\ \leq\ & \big(b_2(\xi-\eta),\xi-\eta\big)_n.\end{aligned} \tag{2.20}$$

$\forall\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ 及a.e. $P\in\Omega$. 其中$(\cdot\,,\cdot)_n$ 表示$\mathbb{R}^n$ 中的内积.

在对f 的假设(H1.1) 及(H1.2) 下不难验证命题3 的条件(2.18) 成立, 故f 的Nemytskii 算子$F: L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 连续且有界.

对$\forall b \in LS(I\!R^n)$, 定义算子$B:\ H \to H$

$$(Bu)(P,\xi) = b(u(P,\xi)), \qquad \forall u \in H \quad \text{a.e.} \quad P \in \Omega.$$

则称B 为由b 生成的常乘算子. 显然

$$\sigma(B) = \sigma_P(B) = \sigma(b),$$

其中$\sigma(\cdot)$ 表示谱, 而$\sigma_P(B)$ 表示点谱.

设$\lambda_{(1)}^j \le \lambda_2^{(j)} \le \cdots \le \lambda_n^{(j)}$, $j = 1,2$ 分别为$b_j\,(j = 1,2)$ 的特征值, 且每个特征值出现其重数次. 我们有如下简单事实

命题 4 如果$b_j \in LS(I\!R^n), j = 1,2$ 且

$$(b_1\xi,\xi)_n \le (b_2\xi,\xi)_n \qquad \forall \xi \in I\!R^n,$$

则$\lambda_k^{(1)} \le \lambda_k^{(2)}$, $k = 1,\cdots,n$.

证明 设$\{\rho_k^j:\ k = 1,\cdots,n\}$, $j = 1,2$ 是由对矩阵b_j 的特征函数构成的$I\!R^n$ 的正交基. 反设存在s, 使$\lambda_s^{(1)} > \lambda_s^{(2)}$. 记

$$M = \text{span}\,\{e_k^2:\ k = 1,2,\cdots,s\},$$
$$N = \text{span}\,\{e_k^1:\ k = s,\cdots,n\}.$$

易见$M + N = I\!R^n$. 由维数定理可知

$$M \cap N \neq \{0\},$$

从而存在$\xi \in I\!R^n, \xi \in M \cap N$ 且$\xi \neq 0$, 据Raleigh 不等式

$$\lambda_s^{(1)} \le \frac{(b_1\xi,\xi)_n}{(\xi,\xi)_n} \le \frac{(b_2\xi,\xi)_n}{(\xi,\xi)_n} \le \lambda_s^{(2)}.$$

矛盾! 故$\lambda_k^{(1)} \le \lambda_k^{(2)}, k = 1,\cdots,n$. ∎

现在考察方程

$$Au = f(P, u), \qquad P \in \Omega, \tag{2.21}$$

这里$A: D(A) \subset H \to H$ 是一自伴算子且满足

(H2.1) B_j, $j = 1, 2$ 与A 可交换;

(H2.2) $\sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}\right] \cap \sigma(A) = \phi.$

定理 2.2.3 假设(H1.1), (H1.2), (H2.1), (H2.2) 均成立，则方程(2.21) 有唯一解.

证明 设$\{e_k^j: k = 1, \cdots, n\}$, $j = 1, 2$, 为由b_j 的特征向量构成的$\mathbb{R}^n$ 的两组正交基. 则b_j 有谱分解

$$b_j \xi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(j)} (e_k^j, \xi) e_k^j, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

设ε_k 是充分小的正数，使得$\{\lambda_k^{(2)} + \varepsilon_k: k = 1, \cdots, n\}$ 和$\{\lambda_k^{(1)} - \varepsilon_k: k = 1, \cdots, n\}$ 逐点不同且满足

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left[\lambda_k^{(1)} - \varepsilon_k, \lambda_k^{(2)} + \varepsilon_k\right] \cap \sigma(A) = \phi.$$

作

$$b_{1,\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(1)} - \varepsilon)(e_k^1, \cdot)_n e_k^1,$$
$$b_{2,\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(2)} + \varepsilon)(e_k^2, \cdot)_n e_k^2,$$

则(H2.2) 及(2.20) 式在以$b_{j,\varepsilon}$ 代替b_j 后仍然成立. 由此可知，可以不失一般性地假设b_j 的特征值$\lambda_k^{(j)}$ 是逐点不同的.

记$M_k^j = \ker(B_j - \lambda_k^{(j)} Id)$. 设$Q_k^j$ 为H 到M_k^j 上的直交投影. 不难看出Q_k^j 即为由投影$q_k^j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 e_k^j$ (实际上是一个对称阵) 生成的常乘算子. 故

$$B_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(j)} Q_k^j.$$

由于b_1 和b_2 可交换, 故

$$b_2(b_1 e_k^2) = b_1(b_2 e_k^2) = b_1(\lambda_k^{(2)} e_k^2) = \lambda_k^{(2)}(b_1 e_k^2).$$

可见存在$\lambda_k' \in \{\lambda_k^{(1)} \mid k = 1, \cdots, n\}$, 使

$$b_1 e_k^2 = \lambda_k' e_k^2,$$

即存在$k' \in \{1, \cdots, n\}$, 使$\lambda_{k'}^{(1)} = \lambda_k'$, $e_{k'}^1 = e_k^2$. 因b_j 特征值逐点不同, 故存在$\{1, \cdots, n\}$ 的一个重排, 使$Q_k^1 = Q_{k'}^2$. 不妨设

$$Q_k^1 = Q_k^2, \qquad k = 1, \cdots, n. \tag{2.22}$$

因A 为自伴算子, 故A 有右连续谱族$\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ 且A 可谱分解为

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

对$\forall \alpha, \beta \in \rho(A)$, $\alpha < \beta$ ($\rho(\cdot)$ 表正则集). 记

$$E(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta dE_\lambda.$$

由于B_j 与A 可交换, 故Q_k^j 与$E_\lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$ 也可交换. 从而自伴算子$A - B_j$ 有谱分解

$$A - B_j = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_k^{(j)}) \, dE_\lambda \circ Q_k^j \tag{2.23}$$

定义算子$Q_j, j=1,2$ 如下

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{n} E(\lambda_k^{(2)}, +\infty) \circ Q_k^2,$$

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{n} E(-\infty, \lambda_k^{(1)}) \circ Q_k^1,$$

并设

$$X = Q_1(H), \qquad Y = Q_2(H),$$

我们有

$$E\big(-\infty, \lambda_k^{(1)}\big) = Id - E\big(\lambda_k^{(2)}, +\infty\big).$$

由(2.22) 可知

$$Q_2 = Id - Q_1$$

及

$$H = X \oplus Y.$$

进一步，记

$$\gamma = \operatorname{dist}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}], \sigma(A)\right) > 0.$$

则由(2.23) 可知

$$\big((A - B_1)u, u\big) \le -\gamma \|u\|^2, \qquad u \in X \cap D(A),$$

$$\big((A - B_2)u, u\big) \ge \gamma \|u\|^2, \qquad u \in Y \cap D(A).$$

事实上，设

$$v = Q_1 u = \sum_{k=1}^{n} E(-\infty, \lambda_k^{(1)}) Q_k^1 u, \qquad w = \sum_{k=1}^{n} E(\lambda_k^{(2)}, +\infty) Q_k^2 u,$$

则

$$(A-B_1)v=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda-\lambda_k^{(1)})dE_\lambda\circ Q_k^1\left(\sum_{m=1}^{n}E(-\infty,\lambda_m^{(1)})Q_m^1u\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^{(1)}}(\lambda-\lambda_k^{(1)})dE_\lambda\circ Q_k^1u.$$

因$\lambda\le\lambda_k^{(1)}$，$|\lambda-\lambda_k^{(1)}|\ge\gamma$ 可知$\lambda-\lambda_k^{(1)}\le-\gamma$, 从而

$$\begin{aligned}((A-B_1)v,v)&=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^{(1)}}(\lambda-\lambda_k^{(1)})d\|E_\lambda Q_k^1u\|^2\\&\le-\gamma\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^{(1)}}d\|E_\lambda Q_k^1u\|^2.\\&=-\gamma\|v\|^2.\end{aligned}$$

同理

$$\big((A-B_2)w,w\big)\ge\gamma\|w\|^2.$$

设$F:H\to H$ 为f 的Nemytskii 算子，则因f 满足位势Carathéodory 条件及(2.20), 故f 是位势算子且满足

$$\big(B_1(u-v),u-v\big)\le\big(F(u)-F(v),u-v\big)\le\big(B_2(u-v),u-v\big)$$
$$\forall\,u,\,v\in H.$$

于是定理1.2.2 的全部条件均满足，从而可得方程(2.21) 有唯一解，且该解为泛函

$$\begin{aligned}&J(x,y)=I(x+y):H\to\mathbb{R}, &&x\in X,\quad y\in Y,\\&I(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-G(p,u), &&u\in H,\quad p\in\Omega\end{aligned}$$

的一个鞍点. ∎

2.2.3 应用举例

先介绍一些记号和术语.

设$I\!R^s$ 是s 维实欧几里德空间, $s \geq 1$. 记$J_s = [0,2\pi]^s = \underbrace{[0,2\pi]\times\cdots\times[0,2\pi]}_{s}$. 设$C_s^\infty = \{\varphi : I\!R^s \to I\!R^n \mid \varphi$ 为无穷次可微2π- 周期实值映象$\}$.

设$H_{0,s} = \{u : J_s \to I\!R^n \mid \sum_{k=1}^n u_k^2$ 在J_s 上可积$\}$, 则$H_{0,s}$ 在内积

$$[u,v]_s = (2\pi)^{-s}\int_{J_s}\sum_{k=1}^n u_k(P)v_k(P)\,dP$$

下是一个Hilbert 空间.

记$e_\nu(P) = \exp(i\langle v,P\rangle)$, 其中$v = (v_1,\cdots,v_s) \in Z\!\!\!Z^s$, $P = (x_1,\cdots,x_s) \in I\!R^s$, $\langle v,P\rangle = v_1x_1+\cdots+v_sx_s$. 众所周知, 集$\{e_\nu(P) : v \in Z\!\!\!Z^s\}$ 是$H_{0,s}$ 的一组正交基, 见[43]. $\forall u \in H_{0,s}$ 均可表示为一个绝对收敛的Fourier 级数

$$u(P) = \sum_{v\in Z\!\!\!Z^s} C_v e_v(P),$$

其中$C_\nu = [u(P),\ e_\nu(P)]_s$, $C_{-\nu} = \overline{C}_v$.

设$H_{k,s}$ 为C_s^∞ 在范数

$$\|\varphi\|_{k,s}^2 = \sum_{|\nu|\leq k}\|D^\nu\varphi\|_{0,s}^2$$

下的完备化. 其中$|\nu| = \nu_1+\cdots+\nu_s$ 而$D^\nu\varphi$ 表示φ 的偏导数$\frac{\partial^{|\nu|}\varphi}{\partial^{\nu_1}p_1\cdots\partial^{\nu_s}p_s}$. 由[12] 中的Sobolev 引理, 我们有如下

命题 5 若$k > \frac{s}{2}+r$, 则

$$H_{k,s} \subset C^r, \tag{2.24}$$

其中$C^r = \{\varphi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s \mid \varphi$ 为r 次可微实值 2π- 周期映象$\}$.

再记D_s 为C_s^∞ 在半范$\{p_k(\varphi) : k = 0, \cdots, +\infty\}$ 下构成的拓扑空间. 其中

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\nu| \le k} \sup_{J_s} \|D^\nu \varphi(P)\|_n,$$

而$\|\cdot\|_n$ 表$\mathbb{R}^n$ 中通常的范数.

令D'_s 为D_s 上连续线性泛函的全体, $[u, \varphi]$ 为$u \in D'_s$ 在$\varphi \in D_s$ 的取值. 显然$H_{k,s} \subset D'_s$ (当$k \ge 0$), 并且

$$[u, \varphi] = (2\pi)^s [u, \varphi]_s, \qquad u \in H_{k,s}, \quad \varphi \in D_s.$$

如果$u \in D'_s$, 我们可定义广义导数$D^\nu u \in D'_s$, 方法如下:

$$[D^\nu u, \varphi] = (-1)^\nu [u, D^\nu \varphi] \qquad \forall \varphi \in D_s.$$

如果$u \in H_{0,s} \subset D'_s$, $u = \sum_\nu C_\nu e_\nu(P)$ 且$D^\mu u \in H_{0,s} \subset D'$, 则

$$D^\mu u = \sum_\nu C_\nu i^{|\mu|} \nu^\mu e_v(P).$$

进一步,

$$H_{k,s} = \{u \in H_{0,s} \mid D^v u \in H_{0,s}, |v| \le k\},$$

而

$$\|u\|_{k,s}^2 = \sum_{|v| \le k} \|D^v u\|_{0,s}^2.$$

现设$L : D(L) \subset H_{0,s} \to H_{0,s}$ 是一常系数自伴微分算子. L 的定义域$D(L) = \{u \in H_{0,s} \mid Lu \in H_{0,s}\}$.

定义 方程

$$Lu = f, \qquad f \in H_{0,s} \tag{2.25}$$

的广义解是指：一个满足

$$[u, L\varphi]_s = [f, \varphi]_s \qquad \forall \varphi \in D_s$$

的函数$u \in D(L)$.

设$f : J_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个满足位势Carathéodory 条件的函数，$f(P,0) \in L^2(J_s, \mathbb{R}^n)$.

假设存在两个$n \times n$ 对称可交换(常元素) 矩阵b_1 和b_2, 使

$$\begin{aligned}\big(b_1(\xi-\eta), \xi-\eta\big)_n \leq \big(f(P,\xi) - f(P,\eta), \xi-\eta\big)_n \\ \leq \big(b_2(\xi-\eta), \xi-\eta\big)_n,\end{aligned} \tag{2.26}$$

对a.e. $P \in J_s$ 及$\forall \xi$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ 成立.

设$F(u) = f(P, u(P))$, 则$F : H_{0,s} \to H_{0,s}$.

现在考察半线性微分方程(组)

$$Lu(P) = f\big(P, u(P)\big). \tag{2.27}$$

由定理2.2.3, 在L 和f 满足(2.26) 及

$$\bigcup_{k=1}^{n} \big[\lambda_k^{(1)},\ \lambda_k^{(2)}\big] \cap \sigma(L) = \phi \tag{2.28}$$

(其中$\{\lambda_k^{(j)};\ k = 1, \cdots, n\}$ 为b_j 的特征值，$j = 1, 2$) 时，方程(2.27) 有唯一解.

下面给出(2.27) 型方程(组) 的两个例子.

例 1 取

$$\begin{aligned}&H_{0,1} = L^2(J_1, \mathbb{R}^n), \qquad J_1 = [0, 2\pi], \\ &L_1 : D(L_1) \subset H_{0,1} \to H_{0,1}, \qquad L_1 u = -u''(t).\end{aligned}$$

其中

$$D(L_1) = \{u \in H_{0,1} : u''(t) \in H_{0,1}\}.$$

若

$$u(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \exp(i\nu t), \qquad a_{-\nu}=\bar{a}_\nu.$$

则在分布意义下

$$L_1 u(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \nu^2 \exp(i\nu t).$$

由于$L_1 u(t)\in H_{0,1}$, 故

$$\|u''\|_{H_{0,1}}^2=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu|^2\nu^4<+\infty,$$

从而

$$\|u'\|_{H_{0,1}}^2=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |a_\nu|^2\nu^2<+\infty,$$

且$u\in H_{2,1}$. 由Sobolev 引理(见命题5) 推知$u\in C^1$, 故$D(L_1)$ 亦可写成

$$D(L_1)=\{u\in H_{0,1}\mid u\in C,\ u'\in C,\ u''\in H_{0,1}\}.$$

我们知道, L_1 是自伴的, 且

$$\sigma(L_1)=\{n^2\mid n=0,1,\cdots\}.$$

设$f: J_1\times \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足位势Carathéodory 条件, $f(P,0)\in L^2(J_1,\mathbb{R}^n)$, 且存在对称可交换$n\times n$ 阵b_1 和b_2 使(2.26) 成立. 再假设

$$\bigcup_{k=1}^{n}[\lambda_k^{(1)},\lambda_k^{(2)}]\cap\{n^2\mid n\in\mathbb{N}^*\}=\emptyset, \tag{2.29}$$

其中$\mathbb{N}^*$ 表示非负整数集.

考察方程

$$-u'' = f\big(t, u(t)\big) + p(t), \tag{2.30}$$

这里 $p(t) \in H_{0,1}$.

据定理2.2.3, 我们得到如下结果.

定理 2.2.4 如果条件(2.26) 和(2.29) 成立, 则对$\forall p \in H_{0,1}$, 方程(2.30) 有唯一的广义解.

注 如果要求定理2.2.4 中的$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 为连续的2π- 周期映象, 而$f(t, P) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 连续且对t 以2π 为周期. 则因$u \in D(L_1)$ 连续, 故$f(t, u(t)) + p(t)$ 连续. 于是u'' 连续且以2π 为周期, 即u 为(2.30) 的古典2π- 周期解.

例 2 记

$$I = \big[0, 2\pi\big] \times \big[0, \pi\big], \qquad \widehat{H} = L^2(I).$$

设

$$e_{\mu\nu}(t, x) = \frac{1}{\pi}\exp(i\mu t)\sin\nu x,$$
$$\forall \mu \in \mathbb{Z}, \qquad \nu \in \mathbb{N},$$

$\forall u \in \widehat{H}$ 可展开成Fourier 级数

$$u(t, x) = \sum_{\mu,\nu \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}} C_{\mu\nu}e_{\mu\nu}(t, x), \qquad C_{-\mu,\nu} = \overline{C}_{\mu,\nu}.$$

设$\widehat{L} : D(\widehat{L}) \subset \widehat{H} \to \widehat{H}$

$$\widehat{L}u = \sum_{\mu,\nu \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}} (\nu^2 - \mu^2)C_{\mu\nu}e_{\mu\nu}(t, x),$$

其中

$$D(\widehat{L}) = \left\{u \in \widehat{H} \,\middle|\, \sum_{\mu,\nu \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}} (\nu^2 - \mu^2)^2|C_{\mu\nu}|^2 < +\infty\right\},$$

则$\widehat{L}$ 在$\widehat{H}$ 中为自伴算子且

$$\sigma(\widehat{L}) = \{\nu^2 - \mu^2 \mid \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{N}\}.$$

进一步，有如下事实.

命题 6 如果$h \in \widehat{H}, u \in D(\widehat{L})$, 则

$$\widehat{L}u = h$$

的充要条件为u 是方程

$$u_{tt} - u_{xx} = h$$

的周期Dirichlet 问题在如下意义下的广义解：

$$\int_I u(t,x)(\varphi_{tt}(t,x) - \varphi_{xx}(t,x))dtdx = \int_I h(t,x)\varphi(t,x)dtdx$$
$$\forall \varphi \in \left\{ \psi \in C^2(I) \left| \begin{array}{ll} \psi(t,0) = \psi(t,\pi), & t \in [0,2\pi] \\ \psi(0,x) = \psi(2\pi,x), & \\ \psi_t(0,x) = \psi_t(2\pi,x), & x \in [0,\pi] \end{array} \right. \right\}.$$

现在定义一个自伴算子

$$L_2 : D(L_2) \subset H^{(2)} \to H^{(2)}, \qquad L_2 = \text{diag}\ (\underbrace{\widehat{L}, \cdots, \widehat{L}}_{n个}),$$

其中$H^{(2)} = L^2(I, \mathbb{R}^n) = \underbrace{\widehat{H} \times \cdots \times \widehat{H}}_{n个}$ 而$D(L_2) = D(\widehat{L})^n$.

设$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个满足Carathéodory 条件的映象. b_1 和b_2 为两个对称可交换$n \times n$ 阵使得(2.26) 成立. 进一步，假定

$$\bigcup_{k=1}^{n} [\lambda_k^{(1)},\ \lambda_k^{(2)}] \cap \{\nu^2 - \mu^2 \mid \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{N}^*\} = \phi. \qquad (2.31)$$

考察双曲系统

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t, x, u) + g(t, x), \tag{2.32}$$

其中$g(t, x) \in H^{(2)}$.

利用定理2.2.3, 我们得到如下结果:

定理 2.2.5 如果(2.26) 和(2.31) 均成立，则双曲系统(2.32) 有一个广义解.

§ 2.3 常微分方程组的周期解 • 渐近非一致 • Hadamard 反函数定理

本节利用Hadamard 反函数定理讨论常微分方程组

$$\ddot{u}(t) + A\dot{u}(t) + \mathrm{grad}\, f(t, u(t)) = e(t) \tag{3.1}$$

的周期解的唯一存在性. 其中A 是$n \times n$ 对称矩阵，$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是C^2 的且对t 以2π 为周期，$e(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ 是2π- 周期的连续函数. 我们将在一定的非一致条件下，给出(3.1) 非共振的一组充分条件. 本节材料主要取自[9], 类似的结果见[38].

定理 2.3.1 设有整数$N > 0$ 及非负函数$\delta_1, \delta_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使对于任意$u \in \mathbb{R}^n$ 和$t \in [0, 2\pi]$ 满足

$$N^2 I < \delta_1(u) I \leq \nabla^2 f(u, t) \leq \delta_1(u) I < (N+1)^2 I, \tag{3.2}$$

其中，I 表$n \times n$ 单位矩阵，$\nabla^2 f$ 表示f 的Hessian 阵. 令

$$\rho(R) \triangleq \min\left\{1 - \max_{\sum_{j=1}^n |\xi_j| \leq R} \frac{\delta_2(\xi)}{(N+1)^2}, \min_{\sum_{j=1}^n |\xi_j| \leq R} \frac{\delta_1(\xi)}{N^2} - 1\right\}. \tag{3.3}$$

如果

$$\int_1^\infty \rho(R)\, dR = \infty, \tag{3.4}$$

那么(3.1) 有唯一的2π- 周期解.

为了给出证明，先介绍一些记号和术语.

以$(\ ,\ )$ 和$|\cdot|$ 分别表示欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 的内积和范数. 设H 是由满足下列条件的函数v 组成的空间:

(i) $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 为绝对连续的2π- 周期函数;

(ii) $\int_0^{2\pi}\left[|\dot{v}(t)|^2+|v(t)|^2\right]dt<+\infty$.

在H 中定义内积

$$\langle u,v\rangle_1=\int_0^{2\pi}(\dot{u}(t),\dot{v}(t))\,dt+\int_0^{2\pi}(u(t),v(t))\,dt,$$

相应的范数记作$\|\cdot\|_1$, 则H 是Hilbert 空间. 令

$$V=\left\{x\in H\,\middle|\,x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right\},$$

$$V^{\perp}=\left\{y\in H\,\middle|\,y(t)=\sum_{k=N+1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}k^2(|a_k|^2+|b_k|^2)<\infty\right\},$$

其中$a_k,b_k\in\mathbb{R}^n$. 于是

$$H=V\oplus V^{\perp}.$$

设

$$L_n^2=\left\{v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\,\middle|\,\int_0^{2\pi}|v(t)|^2\,dt<\infty,\ v\text{以}2\pi\text{为周期}\right\}.$$

在L_n^2 中定义内积

$$\langle u,v\rangle_0=\int_0^{2\pi}(u(t),\ v(t))\,dt,$$

相应的范数记作$\|\cdot\|_0$. 则由Poincaré 不等式可推知：存在常数$C>0$, 使

$$\|u\|_0 \le C\|u\|_1 \qquad \forall\, u\in H, \tag{3.5}$$

从V 及$V^\perp$ 的定义立即可得

$$\begin{aligned}&\|v^\perp\|_0^2 \le \frac{1}{(N+1)^2}\|\dot v^\perp\|_0^2, &&\forall\, v^\perp\in V^\perp,\\ &\|\dot v\|_0^2 \le N^2\|v\|_0^2, &&\forall\, v\in V.\end{aligned}$$

利用Riesz 表现定理，可定义映象$T:H\to H$

$$\langle Tu,v\rangle_1 = \int_0^{2\pi}\left[(\dot u,\ \dot v)-(A\dot u,v)-(\operatorname{grad} f(t,u),v)\right]dt \quad \forall\, u,\, v\in H. \tag{3.6}$$

不难看出，T 是C^1 映象且

$$\langle T'(u)w,v\rangle_1 = \int_0^{2\pi}\left[(\dot w,\ \dot v)-(A\dot w,v)-(\nabla^2 f(t,u)w,v)\right]dt. \tag{3.7}$$

再由Riesz 表现定理，存在$g\in H$, 使

$$\langle g,v\rangle_1 = -\int_0^{2\pi}\big(e(t),\ v(t)\big)\,dt, \qquad \forall v\in H. \tag{3.8}$$

于是u 为(3.1) 的2π- 周期解当且仅当u 满足算子方程

$$T(u)=g, \qquad u\in H. \tag{3.9}$$

对于定理2.3.1 的证明，只需证明(3.9) 唯一可解就够了.

对于任意$v\in H$ 有唯一的直和分解$v=\bar v+\bar v^\perp$, 其中$\bar v\in V$ 而$\bar v^\perp\in V^\perp$. 定义算子$S:H\to H$

$$Sv=\bar v^\perp-\bar v \qquad \forall v\in H.$$

显然S 是H 中的自伴酉算子. 即$S = S^* = S^{-1}$. 令

$$\widetilde{T} = T \circ S,$$

则$\widetilde{T}$ 是$H \to H$ 的C^1 映象. 由于S 可逆, 故方程组(3.1) 的2π- 周期解的存在唯一性等价于方程

$$\widetilde{T}u = g \tag{3.10}$$

的解的存在唯一性.

为此, 我们验证$\widetilde{T}$ 满足Hadamard 反函数定理(定理1.4.1) 的全部条件.

注意到$\widetilde{T}'(u) = T'(Su)S$, 利用(3.7) 得

$$\langle \widetilde{T}'(u)w, v\rangle_1 = \int_0^{2\pi} \left[(S\dot{w}, \dot{v}) - (AS\dot{w}, v) - (\nabla^2 f(t, Su)Sw, v)\right] dt.$$

对于$\forall\, x \in V,\ y \in V^{\perp}$, 我们有

$$Ax \in V, \qquad Ay \in V^{\perp}.$$

因此

$$AS = SA,$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (AS\dot{v}, v)\, dt &= \int_0^{2\pi} (S\dot{v}, Av)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (Sv, A\dot{v})\, dt = -\int_0^{2\pi} (v, SA\dot{v})\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (v, AS\dot{v})\, dt \qquad \forall\, v \in H.
\end{aligned}$$

推知

$$\int_0^{2\pi} (AS\dot{v}, v)\, dt = 0 \qquad \forall\, v \in H.$$

于是, 对任意$v \in H$, 由$\nabla^2 f$ 的对称性, 有

$$
\begin{aligned}
&\langle \widetilde{T}'(u)v, v\rangle_1 \\
=&\int_0^{2\pi} \left[(\dot{\overline{v}}^{\perp} - \dot{\overline{v}},\ \dot{\overline{v}}^{\perp} + \dot{\overline{v}}) - \big(\nabla^2 f(t, Su(t))Sv(t), v(t)\big)\right] dt \\
=&\|\dot{\overline{v}}^{\perp}\|_0^2 - \|\dot{\overline{v}}\|_0^2 - \int_0^{2\pi} (\nabla^2 f(t,\ Su)\overline{v}^{\perp}, \overline{v}^{\perp})\, dt \\
&+ \int_0^{2\pi} (\nabla^2 f(t,\ Su)\overline{v},\ \overline{v})\, dt.
\end{aligned}
$$

由(3.2), $\forall\, u, v \in H$, 有

$$
\delta_1(Su)(v,v) \le (\nabla^2 f(t,u)v,v) \le \delta_2(Su)(v,v), \tag{3.11}
$$

对任意$u \in H$, $u = u(t) = \big(u_1(t), \cdots, u_n(t)\big)$, 由Sobolev 嵌入定理, $u_i \in C\,[0,2\pi]$, $i = 1,2,\cdots,n$, 其中

$$
C[0,2\pi] = \big\{u : [0,2\pi] \to I\!R \mid u \text{ 在 } [0,2\pi] \text{ 上连续且 } u(0) = u(2\pi)\big\}.
$$

令

$$
C_n[0,2\pi] = \underbrace{C[0,2\pi] \times \cdots \times C[0,2\pi]}_{n\text{个}}.
$$

则$C_n[0,2\pi]$ 在范数

$$
\|u\|_C = \sum_{i=1}^{n} \max_{t\in[0,2\pi]} |u_i(t)|
$$

下为一Banach 空间. 再由嵌入定理, 存在$\alpha > 0$, 使

$$
\|u\|_C \ \le\ \alpha\|u\|_1 \qquad \forall\, u \in H.
$$

由于$\sum_{i=1}^n |u_i(t)| \le \|u\|_C \le \alpha\|u\|_1$, 从(3.11) 可知

$$
\begin{aligned}
&\big(\nabla^2 f(t, Su(t))v(t), v(t)\big) \le \delta_2\big(Su(t)\big)\big(v(t), v(t)\big) \\
\le& \max_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \le \alpha\|Su\|_1} \delta_2(\xi)\big(v(t),\ v(t)\big).
\end{aligned}
$$

而

$$(\nabla^2 f(t,Su(t))v(t),v(t)) \geq \delta_1(Su(t))(v(t),v(t))$$
$$\geq \min_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \alpha \|Su\|_1} \delta_1(\xi)(v(t),v(t)),$$

再利用(3.11) 可知

$$\langle \widetilde{T}'(u)v,\, v\rangle_1 \geq \|\dot{v}^\perp\|_0^2 - \max_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \alpha \|u\|_1} \frac{\delta_2(\xi)}{(N+1)^2} \|\dot{v}^\perp\|_0^2 + \min_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \alpha \|u\|_1} \delta_1(\xi) \|\bar{v}\|_0^2 - \|\dot{\bar{v}}\|_0^2, \tag{3.12}$$

记$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} v_i\, dt,\ i = 1, \cdots, n$. 记$A = (a_1, \cdots, a_n)$, 则$\forall \bar{v} \in V$, 有

$$\|A\|_0^2 + \|\dot{\bar{v}}\|_0^2 \leq N^2 \|\bar{v}\|_0^2. \tag{3.13}$$

把(3.13) 代入(3.12), 得

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{T}'(u)v, v\rangle_1 &\geq \|\dot{v}^\perp\|_0^2 - \max_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \alpha \|u\|_1} \frac{\delta_2(\xi)}{(N+1)^2} \|\dot{v}^\perp\|_0^2 \\
&\quad + \min_{\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \alpha \|u\|_1} \frac{\delta_1(\xi)}{N^2} (\|\dot{\bar{v}}\|_0^2 + \|A\|_0^2) - \|\dot{\bar{v}}\|_0^2 \\
&\geq \rho(\alpha \|u\|_1) \left[\|\dot{v}^\perp\|_0^2 + \|\dot{\bar{v}}\|_0^2 \right] + \|A\|_0^2 \\
&= \rho(\alpha \|u\|_1) \|\dot{v}\|_0^2 + \|A\|_0^2 \\
&\geq \rho(\alpha \|u\|_1) \left[\|\dot{v}\|_0^2 + \|A\|_0^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \rho(\alpha \|u\|_1) \left[\|\dot{v}\|_0^2 + \|v - A\|_0^2 + \|A\|_0^2 \right] \\
&\geq \frac{1}{2} \rho(\alpha \|u_1\|) \|v\|_1^2.
\end{aligned}$$

(注意：上面用到$\rho(R) < 1$ 及$\|\dot{v}\|_0^2 \geq \|v - A\|_0^2$ 这两个事实), 依$\rho(R)$ 的定义知，$\rho(\alpha \|u\|_1) > 0, \forall u \in H$. 因此据Lax-Milgram 引理，见[13], 对$\forall u \in H$, $\widetilde{T}'(u)$ 是$H \to H$ 上的同胚，并且

$$\| [\widetilde{T}'(u)]^{-1} \| \leq 2\rho(\alpha \|u\|_1)^{-1}$$

或

$$\rho(\alpha\|u_1\|) \leq \frac{2}{\|[\widetilde{T}'(u)]^{-1}\|}.$$

因此

$$\rho(\alpha R) \leq \inf_{\|u\|_1 < R} \left(\frac{2}{\|[\widetilde{T}'(u)]^{-1}\|} \right) \triangleq 2\xi(R).$$

由题设(3.4) 立即得

$$\int_0^\infty \xi(R)\, dR = \infty,$$

从而满足定理1.4.1 的全部条件. ∎

§ 2.4 波方程 • 渐近非一致 • Mawhin 延拓定理

本节在渐近非一致的前提下利用Mawhin 延拓定理给出一类波方程周期Dirichlet 问题存在弱解的一组充分条件. 该方法自然可以用于其他类型方程在带有不跨特征值扰动时可解性的研究.

2.4.1 主要定理

记$Q = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. $f : Q \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 满足对$L^2(Q)$ 的Carathéodory 条件. 即对$\forall u \in \mathbb{R}^1, f(\cdot, \cdot, u)$ 在Q 上可测; 对a.e. $(t,x) \in Q, f(t,x, \cdot)$ 在$\mathbb{R}^1$ 上连续; 且对$\forall\, r > 0$, $\exists h_r \in L^2(Q)$, 使

$$|f(t,x,u)| \leq h_r(t,x), \tag{4.1}$$

对$\forall\,(t,x) \in Q$ 及$|u| \leq r$ 成立.

考察半线性波方程

$$u_{tt} - u_{xx} - f(t,x,u) = 0. \tag{4.2}$$

定义 在Q上(4.2)的周期Dirichlet问题的弱解是指：一个函数$u: Q \to \mathbb{R}^1, u \in L^2(Q)$且满足对任意

$$v \in \left\{ w \in C^2(\overline{Q}) \,\middle|\, \begin{array}{l} w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,2\pi] \\ w(0,x) - w(\pi,x) = w_t(0,x) - w_t(\pi,x) = 0, \\ \hfill x \in [0,\pi] \end{array} \right\},$$

有

$$\int_J u(t,x)[v_{tt}(t,x) - v_{xx}(t,x)]\,dtdx = \int_J f(t,x,u(t,x))v(t,x)\,dtdx.$$

从§1.1.1我们已经知道：非齐次线性方程

$$u_{tt} - u_{xx} - \lambda u = h(t,x)$$

在Q上的周期Dirichlet问题对$\forall h \in L^2(Q)$唯一可解的充要条件是

$$\lambda \notin \{n^2 - m^2 \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \{\cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \cdots\}. \tag{4.4}$$

本节的主要结果如下：

定理 2.4.1 假设不等式

$$\alpha(t,x) \le \liminf_{|u|\to\infty} \frac{f(t,x,u)}{u} \le \limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(t,x,u)}{u} \le \beta(t,x). \tag{4.5}$$

对a.e. $(t,x) \in Q$成立. 其中$\alpha, \beta \in L^\infty(Q)$满足：存在整数$N$: $N \neq 0$且$N \neq -1$, 使

$$\lambda_N \le \alpha(t,x) \le \beta(t,x) \le \lambda_{N+1}. \tag{4.6}$$

对a.e. $(t,x) \in Q$成立，并且

$$\text{meas}\,\{(t,x) \in Q \mid \lambda_N < \alpha(t,x)\} > 0,$$

$$\text{meas}\,\{(t,x)\in Q \mid \beta(t,x)<\lambda_{N+1}\}>0.$$

进一步，假设对a.e. $(t,x)\in Q$, $\text{sign}\,\lambda_N\cdot f(t,x,\,\cdot\,)$ 为非减函数，则 Q 上(4.2) 的周期Dirichlet 问题至少有一个弱解.

2.4.2 预备引理

设$H=L^2(Q), H$ 的内积和范数分别记为(,) 和$\|\cdot\|$. 设

$$v_{mn}(t,x)=\frac{1}{\pi}\exp(imt)\sin(nx),$$

$m\in \mathbb{Z}$ 而$n\in \mathbb{N}$. 则$\forall u\in H$ 可写成Fourier 级数

$$u=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}u_{mn}v_{mn},$$

其中$u_{mn}=(u,v_{mn})$. 注意，因u 为实值函数，故$\overline{u}_{mn}=u_{-m,n}$.

定义带周期Dirichlet 条件的波算子在H 中的抽象实现$L: D(L)\subset H\to H$

$$Lu=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^2-m^2)u_{mn}v_{mn},$$

其中

$$D(L)=\left\{u\in H\,\middle|\,\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^2-m^2)^2|u_{mn}|^2<\infty\right\},$$

则L 为H 中的自伴算子，且

$$\sigma(L)=\{n^2-m^2: m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}.$$

不难看出，0 为L 的无穷重数特征值而其余的特征值均为有限重.

现将L 的特征值按大小次序排成

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0=0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots.$$

设λ_N, λ_{N+1} 为L 的一对相邻的特征值，满足$\lambda_N \cdot \lambda_{N+1} \neq 0$, 即

$$0 < \lambda_N < \lambda_{N+1}$$

或者

$$\lambda_N < \lambda_{N+1} < 0.$$

令

$$c = \frac{1}{2}(\lambda_N + \lambda_{N+1}).$$

设L 的谱族为$\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, 则$L = \int_R dE_\lambda$. 记

$$P_1 = \int_{-\infty}^{c} dE_\lambda, \qquad P_2 = \int_{c}^{\infty} dE_\lambda;$$
$$H_1 = P_1(H), \qquad H_2 = P_2(H),$$

则H_1 是由L 的满足$i \leq N$ 的所有特征值λ_i 所对应的特征函数张成的子空间，而H_2 是由L 的满足$i \geq N+1$ 的所有特征值λ_i 所对应的特征函数张成的子空间.

进一步,

$$P_1 u = \sum_{n^2 - m^2 \leq N} u_{mn} v_{mn}, \qquad P_2 u = \sum_{n^2 - m^2 \geq N+1} u_{mn} v_{mn}.$$

引理 1 设$\alpha, \beta \in L^\infty(Q)$ 满足

$$\lambda_N \leq \alpha(t,x) \qquad \text{a.e.}$$
$$(\beta(t,x) \leq \lambda_{N+1}, \quad \text{a.e.})$$

且

$$\text{meas}\{(t,x) \in Q \mid \lambda_N < \alpha(t,x)\} > 0,$$
$$(\text{meas}\{(t,x) \in Q \mid \beta(t,x) < \lambda_{N+1}\} > 0).$$

则存在$\delta_1 > 0$ ($\delta_2 > 0$) 使任意满足

$$\alpha(t,x) \le p(t,x),$$
$$\big(p(t,x) \le \beta(t,x)\big)$$

的$p \in L^\infty(Q)$ 及$\forall u_1 \in D(L) \cap H_1$ ($u_2 \in D(L) \cap H_2$) 均有

$$(Lu_1 - pu_1, u_1) \le -\delta_1 \|u_1\|^2, \tag{4.7}$$

$$\big((Lu_2 - pu_2, u_2) \ge \delta_2 \|u_1\|^2\big). \tag{4.8}$$

证明 (4.7) 和(4.8) 的证明完全类似，因此只证(4.7).

首先，由于$p(t,x) \ge \lambda_N$ 对a.e. $(t,x) \in Q$ 成立，故$(Lu_1 - pu_1, u_1) \le 0$. 进一步，因$\alpha(t,x)) \le p(t,x)$ a.e. 于Q, 故

$$(Lu_1 - pu_1, u_1) \le (Lu_1 - \alpha u_1, u_1), \tag{4.9}$$

于是如果存在$\delta_1 > 0$ 使对$\forall\, u_1 \in D(L) \cap H_1$, 有

$$(Lu_1 - \alpha u_1, u_1) \le -\delta_1 \|u_1\|^2, \tag{4.10}$$

则(4.7) 已经成立. 反设不存在这样的$\delta_1 > 0$, 则存在一个序列$\{u_{1k}\} \in D(L) \cap H_1$, 不仿将$u_{1k}$ 记为u_k ($u_k \in H_1 \cap D(L)$), $\|u_k\| = 1$ 且

$$-\frac{1}{k} \le (Lu_k - \alpha u_k, u_k), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{4.11}$$

现在选取$a, b : \lambda_{N-1} < a < \lambda_N < b < \lambda_{N+1}$ 定义投影算子

$$\widetilde{P} = \int_{-\infty}^{a} dE_\lambda \qquad \overline{P} = \int_{a}^{b} dE_\lambda.$$

记$\widetilde{H} = \widetilde{P}(H)$, $\widetilde{H} = \overline{P}(H)$, 则$H_1 = \widetilde{H} \oplus \overline{H}$. 易见，$\widetilde{H}$ 是由满足$i < N$ 的所有特征值λ_i 所对应的特征函数所张成的，而$\overline{H}$ 是λ_N 所对应的特征子空间. 将u_k 分解成

$$u_k = \widetilde{u}_k + \overline{u}_k,$$

其中$\widetilde{u}=\widetilde{P}u,\overline{u}=\overline{P}u$. 因为$\alpha(t,x)\geq\lambda_N$ 对a.e. $(t,x)\in Q$ 成立，故由(4.11) 可知

$$-\frac{1}{k}\leq(Lu_k-\lambda_N u_k,u_k).$$

由上式推知

$$\begin{aligned}-\frac{1}{k}\leq(L\widetilde{u}_k-\lambda_N\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k)=&\sum_{n^2-m^2\leq\lambda_{N-1}}(n^2-m^2)|u_{k_{nm}}|^2-\lambda_N\|\widetilde{u}_k\|^2\\ \leq&(\lambda_{N-1}-\lambda_N)\|\widetilde{u}_k\|^2,\end{aligned}$$

故当$k\to\infty$ 时，$\|\widetilde{u}_k\|^2\to 0$.

现在$\overline{H}$ 有限维，又因$1=\|u_k\|^2=\|\widetilde{u}_k\|^2+\|\overline{u}_k\|^2$ 故$\{u_k\}$ 中有子列，不仿仍记为$\{u_k\}$, 及$\overline{u}\in\overline{H},\|\overline{u}\|=1$, 使$u_k\to\overline{u}$ ($\to$ 表H 中的强收敛). 因$\|\overline{u}\|=1$, $\overline{u}\in\overline{H}$, 故$\overline{u}(t,x)\neq 0$ a.e. 于Q. 同时

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{k}\leq(Lu_k-\alpha u_k,u_k)\\ =&(L\widetilde{u}_k-\alpha\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k)-2\int_J\alpha(t,x)\widetilde{u}_k\overline{u}_k\,dtdx+(L\overline{u}_k-\alpha\overline{u}_k,\overline{u}_k)\\ \leq&-(\lambda_N-\lambda_{N-1})\|\widetilde{u}_k\|^2-2\int_J\alpha(t,x)\widetilde{u}_k\overline{u}_k\,dtdx\\ &+\int_J(\lambda_N-\alpha(t,x))|\overline{u}_k|^2\,dtdx.\end{aligned}$$

利用当$k\to\infty$ 时，$\widetilde{u}_k\to 0$ 及$\overline{u}_k\to\overline{u}$ 的事实可得

$$0\leq\int_J(\lambda_N-\alpha(t,x))|\overline{u}(t,x)|^2\,dtdx.$$

因$\lambda_N\leq\alpha(t,x)$ 对a.e. $(t,x)\in J$ 成立，故有

$$\int_J(\lambda_N-\alpha(t,x))|\overline{u}(t,x)|^2\,dtdx=0,\tag{4.12}$$

这便与$\overline{u}(t,x)\neq 0$ a.e. 于Q 及$\lambda_N-\alpha(t,x)<0$ 在Q 的一个正测集上成立的事实矛盾. 故(4.10) 成立. 即(4.7) 成立. ∎

引理 2 设$\alpha, \beta \in L^2(Q)$ 满足

$$\lambda_N \le \alpha(t,x) \le \beta(t,x) \le \lambda_{N+1} \quad \text{a.e.}$$

且

$$\text{meas}\{(t,x) \in Q \mid \lambda_N < \alpha(t,x)\} > 0,$$
$$\text{meas}\{(t,x) \in Q \mid \beta(t,x) < \lambda_{N+1}\} > 0,$$

则存在$\delta > 0$ 和$\varepsilon > 0$, 使对任意满足

$$\alpha(t,x) - \varepsilon \le p(t,x) \le \beta(t,x) + \varepsilon \qquad \text{a.e. 于 } Q$$

的$p \in L^\infty(Q)$ 有

$$\|Lu - pu\| \ge \delta\|u\|, \quad \forall u \in D(L).$$

证明 反设结论不真，则存在一个序列$\{u_k\} \subset D(L)$, $\|u_k\| = 1$ 及序列$\{p_k\} \subset L^\infty(Q)$ 使对$k = 1, 2, \cdots$ 有

$$\alpha(t,x) - \frac{1}{k} \le p_k(t,x) \le \beta(t,x) + \frac{1}{k} \quad \text{a.e.} \tag{4.13}$$

及

$$\|Lu_k - p_k u_k\| \le \frac{1}{k},$$

即存在$\{f_k\} \subset H$, 使

$$Lu_k - p_k u_k = f_k, \tag{4.14}$$

其中$\|f_k\| \le \frac{1}{k}$ 而$\|u_k\| = 1$.

将u_k 分解成$u_k = u_{1k} + u_{2k}$, 其中$u_{1k} = P_1 u_k$, $u_{2k} = P_2 u_k$, 我们有$u_{1k} \in D(L) \cap H_1$ 而$u_{2k} \in D(L) \cap H_2, k = 1, 2, \cdots$. 在(4.14) 两边取内积，可知

$$(Lu_k - p_k u_k, u_{2k} - u_{1k}) = (f_k, u_{2k} - u_{1k}).$$

由此推知

$$(Lu_{2k} - p_k u_{2k}, u_{2k}) - (Lu_{1k} - p_k u_{1k}, u_{1k}) = (f_k, u_{2k} - u_{1k}). \quad (4.15)$$

现在，由(4.13) 知：对$k = 1, 2, \cdots$

$$\alpha(t, x) \leq p_k(t, x) + \frac{1}{k} \quad \text{a.e.},$$
$$p_k(t, x) - \frac{1}{k} \leq \beta(t, x) \quad \text{a.e.},$$

故据引理1 知，存在正数$\delta_1 > 0$ 和$\delta_2 > 0$, 使对$k = 1, 2, \cdots$, 有

$$(Lu_{1k} - (p_k + \frac{1}{k})u_{1k}, u_{1k}) \leq -\delta_1 \|u_{1k}\|^2,$$
$$(Lu_{2k} - (p_k - \frac{1}{k})u_{2k}, u_{2k}) \geq \delta_2 \|u_{2k}\|^2,$$

结合(4.15) 式并利用Schwarz 不等式推知

$$\delta_2 \|u_{2k}\|^2 - \frac{1}{k}\|u_{2k}\|^2 + \delta_1 \|u_{1k}\|^2 - \frac{1}{k}\|u_{1k}\|^2 \leq \|f_k\| \cdot \|u_{2k} - u_{1k}\|.$$

由此推出

$$\delta_2 \|u_{2k}\|^2 + \delta_1 \|u_{1k}\|^2 \leq \frac{4}{k}.$$

上式表明$u_k = u_{1k} + u_{2k}$, 在H 中强收敛于0. 这与$\|u_k\| = 1$ 的事实相矛盾. ∎

2.4.3 定理 2.4.1 的证明

现在，我们给出定理2.4.1 的证明.

设$\delta > 0$ 及$\varepsilon > 0$ 由引理2 给出. 由(4.5) 可知：存在$r > 0$ 使 a.e. $(t, x) \in J$ 及$\forall u : |u| \geq r$, 有

$$\alpha(t, x) - \varepsilon \leq \frac{f(t, x, u)}{u} \leq \beta(t, x) + \varepsilon,$$

结合(4.1) 可知

$$|f(t,x,u)| \le (c_0+\varepsilon)|u| + h_r(t,x)$$

对a.e. $(t,x)\in J$ 及$\forall u\in \mathbb{R}$ 成立. 其中

$$c_0 = \begin{cases} \lambda_{N+1} & \text{当 } \lambda_N > 0, \\ |\lambda_N| & \text{当 } \lambda_{N+1} < 0. \end{cases}$$

从而推知，映象$F: H\to H$

$$(Fu)(t,x) = f(t,x,u(t,x))$$

连续且有界(这里F 有界是指：F 将H 的有界集映成H 中的有界集). 进一步，(4.2) 在Q 上关于周期Dirichlet 条件的弱解即为抽象方程

$$Lu - Fu = 0 \tag{4.16}$$

在$D(L)$ 中的解.

不失一般性，我们从现在开始仅讨论$\lambda_N > 0$ 的情形. 这是因为如果$\lambda_N < 0$, 则$\widetilde{N} \triangleq -N > 0$. 考察等价方程

$$\widetilde{L}u - \widetilde{F}u = 0,$$

其中$\widetilde{L} = -L$, $\widetilde{F} = -F$. 记

$$0 < \widetilde{\lambda}_N = -\lambda_{-N}, \quad \widetilde{\alpha} = -\beta, \quad \widetilde{\beta} = -\alpha, \quad \widetilde{f} = -f.$$

不难看出

$$\sigma(\widetilde{L}) = \{\cdots < \widetilde{\lambda}_{-2} < \widetilde{\lambda}_{-1} < 0 < \widetilde{\lambda}_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \cdots\},$$

进而(4.5) 和(4.6) 当用$\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{\lambda}_N$, $\widetilde{\lambda}_{N+1}$ 分别替换α, β, f, λ_N, λ_{N+1} 后仍然成立. 同时$\operatorname{sign}\widetilde{\lambda}_N\cdot\widetilde{f}(t,x,\cdot)=\widetilde{f}(t,x,\cdot)=\operatorname{sign}\lambda_{-N}f(t,x,\cdot)$ 仍为非降函数. 于是又回到$\lambda_N>0$ 的情形.

由对f 的题设, F 在H 上是单调的. 显然, L 的右逆K 是紧的, 故$K\overline{Q}F$ 是H 上的紧映象. (其中$\overline{Q}:H\to\operatorname{Im}L$ 为直交投影.) 定义线性算子$A:H\to H$

$$(Au)(t,x)=\alpha(t,x)u(t,x),$$

则A 在H 上连续且强单调.

据延拓定理1.7.10, 证方程(4.16) 存在解, 只需证方程族

$$Lu-(1-\lambda)Au-\lambda Fu=0,\qquad \lambda\in[0,1] \tag{4.17}$$

的所有可能解有一个不依赖于λ 的先验界.

令$g:Q\times I\!R\to I\!R$

$$g(t,x,u)=\begin{cases}\dfrac{f(t,x,u)}{u} & 当\ |u|\ge r,\\ \dfrac{f(t,x,r)}{r}\cdot\dfrac{u}{r}+(1-\dfrac{u}{r})\alpha(t,u) & 当\ 0\le u<r,\\ \dfrac{f(t,x,-r)}{r}\cdot\dfrac{u}{r}+(1+\dfrac{u}{r})\alpha(t,x) & 当\ -r\le u\le 0.\end{cases}$$

及函数$b:Q\times I\!R\to I\!R$

$$b(t,x,u)=f(t,x,u)-g(t,x,u)u.$$

不难验证

$$\alpha(t,x)-\varepsilon\le g(t,x,u)\le\beta(t,x)+\varepsilon$$

对a.e. $(t,x)\in Q$ 及$\forall u\in I\!R$ 成立, 且b 满足对$L^2(Q)$ 的Carathéodory 条件, 同时

$$|b(t,x,u)|\le 2h_r(t,x) \tag{4.18}$$

对a.e. $(t,x)\in Q$ 及$\forall u\in \mathbb{R}$ 成立. 对$\forall u\in H$, 再定义线性映象 $G(u):H\to H$

$$[G(u)v](t,x)=g(t,x,u(t,x))v(t,x)$$

及映象$B:H\to H$

$$(Bu)(t,x)=b(t,x,u(t,x)),$$

则对$\forall u\in H$, 我们有

$$Fu=G(u)u+Bu,$$

于是(4.17) 可以等价地写成

$$Lu-[(1-\lambda)A-\lambda G(u)]u=\lambda Bu. \tag{4.19}$$

但，由A,G 的定义，我们知：对a.e. $(t,x)\in Q$ 及$\forall\lambda\in[0,1]$

$$\alpha(t,x)-\varepsilon\le(1-\lambda)(Au)(t,x)+\lambda[(G(u)u)](t,x)\le\beta(t,x)+\varepsilon,$$

因此，利用引理2 及(4.18) 和(4.19), 有

$$2\|h_r\|>\|\lambda Bu\|=\|Lu-[(1-\lambda)A-\lambda G(u)]u\|\ge\delta\|u\|,$$

即

$$\|u\|\le\frac{2}{\delta}\|h_r\|.$$

现选取$\rho:\rho>\frac{2}{\delta}\|h_r\|$, 则定理1.7.10 的全部条件均满足. ∎

2.4.4 存在唯一性结果

由定理2.4.1 及引理2 可以得到如下解的存在唯一性结果.

定理 2.4.2 设$f: Q\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对$L^2(Q)$ 的Carathéodory条件且

$$\alpha(t,x) \le \frac{f(t,x,u)-f(t,x,v)}{u-v} \le \beta(t,x) \tag{4.20}$$

对a.e. $(t,x)\in Q$ 及$\forall u,\ v\in \mathbb{R},\ u\neq v$ 成立，其中α,β 即定理2.4.1中的α 和β. 则(4.2) 的周期Dirichlet 问题有唯一的弱解.

证明 从(4.20) 可以推知，定理2.4.1 的题设(4.5) 成立并且$\mathrm{sign}\lambda_N\cdot f(t,x,\cdot)$ 为不减函数，a.e. $(t,x)\in Q$. 于是由定理2.4.1, 弱解是存在的.

现设u,v 均为(4.2) 的弱解. 记$w=u-v$, 则w 将是方程

$$w_{tt}-w_{xx}-[f(t,x,w+v)-f(t,x,v)]=0 \tag{4.21}$$

的周期Dirichlet 问题的一个弱解. 令

$$g(t,x,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{w}[f(t,x,v+w)-f(t,x,v)] & \text{当 } w\neq 0\\ \alpha(t,x) & \text{当 } w=0,\end{cases}$$

则(4.21) 可以改写成

$$w_{tt}-w_{xx}-g(t,x,w)w=0, \tag{4.22}$$

其中

$$\alpha(t,x)\le g(t,x,w)\le \beta(t,x)$$

对a.e. $(t,x)\in Q$ 及$\forall w\in \mathbb{R}$ 成立. 据引理2 从(4.22) 不难推知$w=0$. 即$u=v$ ∎

注 如果偏导数$f'_u(t,x,u)$ 存在且

$$\alpha(t,x)\le f'_u(t,x,u)\le \beta(t,x)$$

对a.e. $(t,x)\in J$ 及$\forall u\in \mathbb{R}$ 成立. 则条件(4.20) 满足.

§ 2.5 椭圆方程•渐近非一致•鞍点约化法

§2.2 中曾利用寻找泛函鞍点的办法讨论渐近一致性条件下方程组解的存在唯一性. 作为§2.2 中方法的发展，本节将利用鞍点约化法讨论渐近非一致条件下半线性椭圆方程Dirichlet 边值问题的可解性. 本节的方法也可用于解决渐近非一致条件下其他类型的问题.

2.5.1 一对存在性结果

本小节结果选自文献[48].

设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 是一个有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界区域. $p: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足Carathéodory 条件，即对$\forall t \in \mathbb{R}, p(\cdot, t): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ 可测；对a.e. $x \in \overline{\Omega}, p(x, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续. 我们假定存在正常数c_1, c_2, 使

$$|p(x,t)| \leq c_1 + c_2|t| \qquad \text{a.e.} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

考察边值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u = p(x,u), & \qquad x \in \Omega, \\ u = 0, & \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.2}$$

记特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u, & \qquad x \in \Omega, \\ u = 0, & \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.3}$$

的“相异” 特征值序列为

$$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_i < \cdots .$$

对$i = 1, 2, \cdots$, 记$E(\lambda_i)$ 为相应于λ_i 的特征子空间，则$\dim E(\lambda_i)$ 等于λ_i 的重数m_i. 对于一个定义在$\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ 上的象p 这样的函数，我

们用相应的大写字母表示其原函数，即

$$P(x,t)=\int_0^t p(x,s)\,ds.$$

我们将证明如下存在性结果.

定理 2.5.1 假设

(i) 存在一个满足$k(x)\le\lambda_{l+1}$ a.e. 于Ω.

$$\text{meas}\{x\in\Omega\mid k(x)<\lambda_{l+1}\}>0$$

的函数$k(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ 使

$$\frac{p(x,t_1)-p(x,t_2)}{t_1-t_2}\le k(x) \tag{5.4}$$

对a.e. $x\in\Omega;t_1,t_2\in\mathbb{R},t_1\ne t_2$ 成立.

(ii) 存在函数$h_1,h_2\in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$ 及一个常数$M>0$ 使

$$\frac{\lambda_l t+h_1(x,t)}{t}\le\frac{p(x,t)}{t}\le\frac{\lambda_{l+1}t-h_2(x,t)}{t} \tag{5.5}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$t:|t|\ge M$ 成立. 进一步，假设当$\varphi\in E(\lambda_l)$ 且$\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\,dt\to\infty$ 时有，

$$\int_\Omega H_1(x,\varphi(x))\,dx\to\infty. \tag{5.6}$$

当$\psi\in E(\lambda_{l+1})$ 且$\int_\Omega|\nabla\psi|^2dx\to\infty$ 时，有

$$\int_\Omega H_2(x,\psi(x))\,dx\to\infty, \tag{5.7}$$

则问题(5.2) 至少有一个弱解.

证明　取$E = H_0^1(\Omega)(= W_0^{1,2}(\Omega))$, E 的内积为

$$(u,v) \triangleq \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \qquad u,v \in H_0^1(\Omega) = E \tag{5.8}$$

相应的范数记为$\|\cdot\|$. 记$L^2(\Omega)$ 的内积和范数分别为$(\cdot,\cdot)_0$ 及$\|\cdot\|_0$. 设

$$V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_l),$$

而W 为V 在E 中的直交补，则

$$W = \overline{E(\lambda_{l+1}) \oplus E(\lambda_{l+2}) \oplus \cdots},$$

且

$$E = V \oplus W.$$

在E 上考察泛函

$$G(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega P(x,u)\, dx \qquad u \in E.$$

众所周知$G(\cdot) \in C^1(E, I\!R)$ 且G 的临界点即为(5.2) 的弱解.

对于$\forall v \in V$, 考察泛函$J_v(\cdot) \in C^1(W, R)$.

$$J_v(w) = G(v+w) \qquad \forall v \in W.$$

由(5.5) 的后半部分和(5.7) 不难推出，$J_v(\cdot)$ 是强制的，即当$\|w\| \to \infty$ 于W 时，有$J_v(w) \to \infty$. 进一步，由G 在E 上的弱下半连续性可推出$J_v(\cdot)$ 在W 上弱下半连续. 故存在$R > 0$ 及$\theta(v) \in B_R \cap W$ (这里$B_R = \{u \in E \mid \|u\| < R\}$) 使

$$J_v(\theta(v)) = \min_{w \in \overline{B}_R \cap W} J_v(w) = \min_{w \in W} J_v(w). \tag{5.9}$$

于是$\theta(v)$ 是$J_v(\cdot)$ 的临界点. $\theta(v)$ 满足: 对$\forall w \in W$, 有

$$\begin{aligned}(J_v'(\theta(v)),w) =&(G'(v+\theta(v)),w)\\ =&(\theta(v),w)-\int_\Omega p(x,v+\theta(v))\,dx=0.\end{aligned}\tag{5.10}$$

下面分四步来完成证明

第一步 证$\theta(v)$ 是$J_v(\cdot)$ 的唯一临界点.

反设$J_v(\cdot)$ 在W 中有两个不同的临界点w_1 和w_2, $w_1 \neq w_2$. 记$\widetilde{w}=w_1-w_2$, 则$\widetilde{w}\in W$, $\widetilde{w}\neq 0$ 且

$$\|\widetilde{w}\|^2-\int_\Omega\{p(x,v+w_1)-p(x,v+w_2)\}(w_1-w_2)\,dx=0.$$

由(5.4) 推知

$$\|\widetilde{w}\|^2-\int_\Omega k(x)|\widetilde{w}|^2\,dx\le 0,\tag{5.11}$$

因$\widetilde{w}\in W=\overline{E(\lambda_{l+1})\oplus E(\lambda_{l+2})\oplus\cdots}$, 故

$$\|\widetilde{w}\|^2-\int_\Omega \lambda_{l+1}|\widetilde{w}|^2dx\ge 0.\tag{5.12}$$

又由于$k(x)\le\lambda_{l+1}$ a.e. 于Ω, 推得

$$\|\widetilde{w}\|^2-\int_\Omega \lambda_{l+1}|\widetilde{w}|^2dx= 0.\tag{5.13}$$

因此$\widetilde{w}$ 为λ_{l+1} 的特征函数. 进一步, 由(5.11) 和(5.12), 有

$$\int_\Omega\left[\lambda_{l+1}-k(x)\right]|\widetilde{w}|^2\,dx=0.$$

于是$\widetilde{w}=0$ 在集合$\{x\in\Omega\mid k(x)<\lambda_{l+1}\}$ 的一个正测度集上成立. 由于特征值问题(5.3) 的特征函数具有唯一延拓性质(即在一个正测

度上为零值可推出在整个Ω 上恒为零). 故$\widetilde{w}=0$ 于Ω, 即$w_1=w_2$. 矛盾！于是我们定义了一个映象$\theta(\cdot):V\to W$.

第二步 证$\theta(\cdot)$ 连续.

先证$\theta(\cdot)$ 将有界集映成有界集. 事实上设$\{v_n\}$ 是V 中的有界序列, 则存在一个常数$c_3>0$, 使$G(v_n)<c_3, n=1,2,\cdots$. 从关系式(5.9) 可知

$$G(v_n+\theta(v_n))\le G(v_n)<c_3,\qquad n=1,2,\cdots,\tag{5.14}$$

假如$\{\theta(v_n)\}$ 在W 中无界, 则由(5.5) 的第二部分及(5.7) 推知：当$n\to\infty$ 时, 有

$$G(v_n+\theta(v_n))\to\infty,$$

这与(5.14) 矛盾.

其次, 设$\{v_n\}\subset V, v_0\in V, v_n\to v_0$ 于V. 由于$\theta(\cdot)$ 为有界映象, 故存在$\{v_n\}$ 的子列, 不仿仍记为v_n, 使$\{\theta(v_n)\}$ 在W 中弱收敛于$w_0\in W$. 因$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, 故通过选择一个子列的办法, 我们可以不妨假定$\{\theta(v_n)\}$ 收敛于w_0 于$L^2(\Omega)$. 现在由(5.1) 可推出

$$\lim_{n\to\infty}p(x,v_n+\theta(v_n))=p(x,v_0+w_0)\qquad 于\ L^2(\Omega).$$

因此, 对$\forall w\in W$, 有

$$\begin{aligned}0=&\lim_{n\to\infty}\{(\theta(v_n),w)-\int_\Omega p(x,v_n+\theta(v_n))w\,dx\}\\=&(w_0,w)-\int_\Omega p(x,v_0+w_0)w\,dx.\end{aligned}$$

可见w_0 是$J_v(\cdot)$ 的一个临界点. 由第一步的结论可知$w_0=\theta(v_0)$. 在关系式(5.10) 中取$w=\theta(v_n)-\theta(v_0),\theta(v)$ 分别取$\theta(v_n)$ 和$\theta(v_0)$ 可推得

$$\begin{aligned}\|\theta(v_n)-\theta(v_0)\|^2-\int_\Omega&\{p(x,v_n+\theta(v_n))\\&-p(x,v_0+\theta_0)\}\times\{\theta(v_n)-\theta(v_0)\}\,dx=0.\end{aligned}$$

由$\lim_{n\to\infty} p(x, v_n + \theta(v_n)) = p(x, v_0 + \theta(v_0))$ 于$L^2(\Omega)$ 及$\{\theta(v_n)\}$ 为有界集的事实，便可推得$\{\theta(v_n)\}$ 在$\|\cdot\|$ 范数下收敛于$\theta(v_0)$.

第三步 我们定义泛函$I(\cdot): V \to \mathbb{R}$

$$I(v) = G(v + \theta(v)) = \min_{w \in W} G(v + w), \tag{5.15}$$

下证$I \in C'(V, \mathbb{R})$ 且

$$(I'(v), \gamma) = (G'(v + \theta(v)), \gamma) \qquad \forall v, \gamma \in V. \tag{5.16}$$

事实上，固定$v \in V$. 对$t > 0, \gamma \in V$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{I(v+t\gamma) - I(v)}{t} &= \frac{G(v + t\gamma + \theta(v + t\gamma)) - G(v + \theta(v))}{} \\ &\le \frac{G(v + t\gamma + \theta(v)) - G(v + \theta(v))}{t} \\ &= \int_0^1 (G'(v + \theta(v) + st\gamma), \gamma)\, ds.\end{aligned}$$

同理

$$\frac{I(v+t\gamma) - I(v)}{t} \ge \int_0^1 (G'(v + \theta(v + t\gamma) + st\gamma),\, \gamma)\, ds.$$

因$G'(\cdot)$ 及$\theta(\cdot)$ 连续，我们得

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{I(v+t\gamma) - I(v)}{t} = (G'(v + \theta(v)),\, \gamma).$$

于是$I(\cdot)$ 有一个连续的Gateaux 导数. 从而$I(\cdot)$ Frechet 可微[4], 且有

$$(I'(v), \gamma) = (G'(v + \theta(v)), \gamma) \qquad \forall v, \gamma \in V.$$

第四步 由(5.10) 及(5.16) 可见，$u \in H_0^1(\Omega)$ 为$G(\cdot)$ 的临界点的充要条件为$u = v + \theta(v)$ 而v 是$I(\cdot)$ 在V 中的一个临界点. 下证$I(\cdot)$ 在V 中确有临界点.

由(5.15), 有

$$I(v)=\min_{w\in W}G(v+w)\le G(v),\qquad \forall v\in V.$$

结合(5.5) 式的前半部分及(5.6), 推知：当$\|v\|\to\infty$于V时，$G(v)\to-\infty$. 因此当$\|v\|\to\infty$于V时，$I(v)\to-\infty$. 于是存在$R>0$使

$$\sup\{I(v)\mid v\in V,\|v\|\le R\}=\sup\{I(v)\mid v\in V\}.$$

因$I(\cdot)$为定义在有限维空间V上的连续函数，故上式左端可达max. 于是存在$v_0\in V$, 使

$$I(v_0)=\sup\{I(v)\mid v\in V\},$$

该v_0即$I(\cdot)$在V中的一个临界点. ∎

定理 2.5.2 (定理2.5.1 的"共轭" 定理)

假设

(i)* 存在一个满足$k^*(x)\ge\lambda_l$, a.e. $x\in\Omega$, meas $\{x\in\Omega\mid k^*(x)>\lambda_l\}>0$的函数，$k^*(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$使

$$\frac{p(x,t_1)-p(x,t_2)}{t_1-t_2}\ge k^*(x)\tag{5.17}$$

对a.e. $x\in\Omega$及$t_1,t_2\in\mathbb{R},t_1\ne t_2$成立.

(ii)* 定理2.5.1 的条件(ii) 成立

则问题(5.2) 至少有一个弱解.

证明(梗概) 取$E=H_0^1(\Omega)$. 在E中，设$W=E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_l)$; $V=W^\perp=\overline{E(\lambda_{l+1})\oplus E(\lambda_{l+2})\oplus\cdots}$. 首先定义$\theta(\cdot):V\to W$

$$\forall v\in V,\quad G(v+\theta(v))=\sup\{G(v+w)\mid w\in W\},$$

其中$G(\cdot)$为定理2.5.1 证明中定义的泛函G. 按照定理2.5.1 的证明方法，可证得泛函

$$I(v)=G(v+\theta(v)),\qquad v\in V$$

在V上是弱下半连续的. 从(5.5)的后半部分及(5.7)式可推得：当$\|v\| \to \infty$于V时，$I(v) \to \infty$. 结合$I(\cdot)$的弱下半连续性，可知：存在$v_0 \in V$, 使

$$I(v_0) = \min_{v \in V} I(v),$$

从而$v_0 + \theta(v_0)$是(5.2)的一个弱解. ∎

2.5.2 注记

注 1 在定理2.5.1证明的第一、二步中，我们曾用较大的篇幅论证$J_v(\cdot): W \to \mathbb{R}$的临界点的存在唯一性及$\theta(\cdot): V \to W$的连续性. 换句话说，我们在讨论含参泛函最小点集

$$S_0 = \{(v, \overline{w}) \mid J_v(\overline{w}) = \min_{w \in W} G(v + w)\}$$

的结构.

由此，提出如下有趣的问题：

问题 设$I: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个连续函数. 对$\forall \lambda \in [0,1]$, $I(\lambda, \cdot)$强制. 不难举出反例说明，集合

$$\overline{S}_0 = \{(\lambda, x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid I(\lambda, x) = \min_{y \in \mathbb{R}} I(\lambda, y)\}$$

中未必含有一支连结$\{0\} \times \mathbb{R}$与$\{1\} \times \mathbb{R}$的连通分支. 试问在什么条件下，这种连通分支是存在的？

注 2 在定理2.5.1的证明中，我们选取$E = H_0^1(\Omega)$, 而E的内积为

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx, \tag{5.18}$$

这是因为我们讨论的问题是椭圆方程Dirichlet边值问题.

但若用2.5.1中的方法讨论半线性Duffing方程周期边值问题

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + g(t, u) = e(t), \\ &u(0) - u(2\pi) = \dot{u}(0) - \dot{u}(2\pi) = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

的可解性. (其中g 满足Caatheodory 条件, $e \in L^2[0,2\pi]$), 则空间E 应选为

$$E_1 = \left\{ u \in L^2[0,2\pi] \,\middle|\, \begin{array}{l} u \quad 在[0,2\pi]上绝对连续 \\ u' \in L^2[0,2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \end{array} \right\},$$

内积为

$$(u,v)_{E_1} = \int_0^{2\pi} [\dot{u}\dot{v} + uv]\, dx,$$

此时

$$(u,v) = \int_0^{2\pi} \dot{u}\dot{v}\, dx$$

不再是E_1 的内积. 这是因为$\int_0^{2\pi} \dot{u}\dot{u}\, dx = 0 \not\Longleftrightarrow u = 0 \quad$ a.e.

马如云[41] 在g 满足

(H1) 存在$k : k(\cdot) \in L^\infty(0,2\pi), k(t) \leq (n+1)^2$ 且meas $\{t \in [0,2\pi] \mid k(t) < (n+1)^2\} > 0$, 使对于a.e. $t \in (0,2\pi), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, 有

$$\frac{g(t,x_1) - g(t,x_2)}{x_1 - x_2} \leq k(x). \tag{5.20}$$

(H2) 存在正常数$\delta, M > 0$ 及非负整数n, 使

$$(n+\delta) \leq \frac{2G(t,x)}{x^2} \leq (n+1-\delta)^2, \qquad |x| \geq M \tag{5.21}$$

(其中$G(t,x) = \int_0^x g(t,s)\, ds$) 之下, 用鞍点约化法, 建立了如下结果.

定理 2.5.3 设$e \in L^2(0,2\pi), g : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足Carathéodory 条件且存在常数$c_1, c_2 > 0$, 使

$$|g(t,x) \leq c_1 + c_2|x|$$

对a.e. $t \in (0,2\pi)$ 及$\forall x \in \mathbb{R}$ 成立. 进一步，假设(H1) 和(H2) 成立，则周期边值问题(5.19) 至少有一个弱解.

值得注意的是：(5.21) 已允许扰动项跨越多个特征值.

§ 2.6 Duffing 方程•渐近非一致•相平面分析法

本节用相平面分析法研究半线性Duffing 方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t)$$

的2π- 周期解的存在唯一性，其中$p(t)$ 为连续的2π 周期函数，g 满足渐近非一致性条件

$$m^2 \leq g'(x) \leq (m+1)^2$$

(m 为非负整数) 及

$$g(0) = 0.$$

本节内容选自丁同仁[33] 及李伟固[39].

2.6.1 主要存在性结果

考虑方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t) \tag{6.1}$$

的2π 周期解的存在性，其中p 为连续的2π 周期函数，g 满足渐近非一致性条件

$$m^2 \leq g'(x) \leq (m+1)^2, \qquad g(0) = 0. \tag{6.2}$$

为了陈述结果的方便，先引进一些记号.

设

$$P = \{p(\cdot) \mid p(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), p(t+2\pi) = p(t), t \in \mathbb{R}\},$$
$$P_m = \left\{p(\cdot) \mid p(\cdot) \in P, \int_0^{2\pi} p(t) \begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix} dt = 0,\ k = m, m+1 \right\},$$
$$H_m = \{g(\cdot) \mid g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ 满足 } (6.2)\}.$$

$(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 显然，当$m \geq 1$ 时，$\forall g \in H_m$ 满足

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty. \tag{6.3}$$

我们将假设：$\forall g \in H_0$，也满足(6.3) 式.

现任给$g \in H_m$，令

$$\chi[g] = \min \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - m^2 x|,\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - (m+1)^2 x| \right\}.$$

再记

$$G_m = \{g(\cdot) \mid g(\cdot) \in H_m,\ \chi[g] = \infty\},$$
$$K_m = \{g(\cdot) \mid g(\cdot) \in H_m,\ \chi[g] < \infty\}.$$

$(m = 0, 1, 2, \cdots)$. 显然，有真包含关系

$$G_m \subset H_m; \qquad P_m \subset P \tag{6.4}$$

及关系式

$$H_m = G_m \cup K_m, \qquad G_m \cap K_m = \phi. \tag{6.5}$$

Césari [60] 用非线性分析方法获得如下结果：

定理 2.6.1 对$\forall g(\cdot) \in K_m$ 及$\forall p(\cdot) \in P_m$，方程(6.1) 至少有一个2π 周期解.

证明略. 推广性的工作可参见Fabry 及Fonda [54].

丁同仁[33] 在条件(6.2) 下，完整地解决了(6.1) 的2π 周期解的存在性问题. 主要有如下三个结果.

定理 2.6.2 对$\forall g(\cdot)\in G_m$ 及$\forall p(\cdot)\in P$, 方程(6.1) 至少有一个2π 周期解.

定理 2.6.3 对$\forall g(\cdot)\in H_m$ 及$\forall p(\cdot)\in P_m$, 方程(6.1) 至少有一个2π 周期解.

定理 2.6.4 存在$g(\cdot)\in K_m$ 及$p(\cdot)\in P$, 使方程(6.1) 没有2π 周期解.

不难看出，定理2.6.3 是定理2.6.1 与定理2.6.2 的一个直接推论. 为证定理2.6.4, 仅需找到一个反例就行了(反例见2.6.2). 剩下的主要问题是定理2.6.2 的证明.

2.6.2 一个重要反例

这里将提供一个非线性的反例来证明定理2.6.4. 取

$$g_1(x)=(m+1)^2x-\mathrm{tg}^{-1}x;\qquad p_1(t)=4\cos{(m+1)t}. \tag{6.6}$$

显见，$p_1(\cdot)\in P$. 而且由

$$m^2\le g_1'(x)=(m+1)^2-\frac{1}{1+x^2}\le(m+1)^2$$

推出$g_1(\cdot)\in H_m$. 因为$\chi[g_1]=\frac{\pi}{2}<\infty$, 所以我们还有$g_1(\cdot)\in K_m$.

考虑微分方程

$$\ddot{x}+g_1(x)=p_1(t), \tag{6.7}$$

其中g_1,p_1 由(6.6) 给出.

下证(6.7) 没有2π 周期解.

假设不然，令$x=\varphi(t)$ 是方程(6.7) 的一个2π 周期解. 则$x=\varphi(t)$ 也是线性非齐次方程式

$$\ddot{x}+(m+1)^2x=4\cos(m+1)t+\mathrm{tg}^{-1}\varphi(t)$$

的一个2π 周期解. 因此, 由线性方程周期解的理论推得

$$4\pi=\int_0^{2\pi}[4\cos^2(m+1)t\,dt=\left|-\int_0^{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\varphi(t)\cos(m+1)t\,dt\right|$$
$$\le\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2}\,dt=\pi^2,$$

即得$4\le\pi$. 这是一个矛盾. 因此方程(6.7) 不可能有2π 周期解.

注 上述反例表明: 对带不跨特征值扰动的问题. 由渐近非一致性假设未必能保证问题对任意自由项均可解. 这种现象不仅出现在半线性Duffing 方程周期边值问题中, 而且普遍存在于其他类型的问题中.

2.6.3 预备引理

为证定理2.6.2, 先作一些预备工作.

本文所用方法的关键是下述引理1 :

引理 1 设$D(b)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le b^2(b>0)\}$ 设$T:D(b)\to\mathbb{R}^2,T(x_0,y_0)=(x_1,y_1)$. 若条件

$$(x_1-x_0)x_0+(y_1-y_0)y_0\ne\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}\tag{6.8}$$

对$(x_0,y_0)\in\partial D(b)$ 成立, 则T 在$D(b)$ 内至少有一个不动点.

其次, 我们需要一个含参定积分的渐近展开式.

引理 2 设$a>0$ 和$\alpha>0$ 为任意给定的常数, $\xi>0$ 为一个大参数. 再设

$$J(\xi)=\int_{-\frac{\pi}{2}-\sigma}^{\frac{\pi}{2}-\sigma}\cos\theta\operatorname{tg}^{-1}\frac{\xi\cos\theta}{a}\,d\theta,\tag{6.9}$$

其中$\sigma=\frac{\pi a\alpha}{2\xi}$. 则当$\xi$ 充分大时, 渐近式

$$J(\xi)=\pi-\frac{\alpha\pi}{\xi}+o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

成立.

最后，考虑微分方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t), \tag{6.10}$$

其中$g(\cdot) \in H_m$ 而$p(\cdot) \in P$.

微分方程式(6.10) 等价于微分系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -g(x) + p(x). \tag{6.11}$$

又设初始条件

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0. \tag{6.12}$$

易知微分系统(6.11) 满足初始条件(6.12) 的解

$$x = x(t, x_0, y_0), \qquad y = y(t, x_0, y_0) \tag{6.13}$$

在$(-\infty, +\infty)$ 上存在而且唯一.

利用极坐标，(6.12) 式也可表成

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$(x_0 = r_0\cos\theta_0, \qquad y_0 = r_0\sin\theta_0),$$

其中$r = r(t) = r(t, r_0, \theta_0) \geq 0$, $\theta = \theta(t) = \theta(t, r_0, \theta_0)$. 由微分系统(6.11) 得

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = xy - yg(x) + yp(t)$$

或

$$\frac{dr}{dt} = \frac{xy - y \cdot g(x) + yp(t)}{r^2} \cdot r \qquad (r \neq 0). \tag{6.14}$$

当$r \geq 1$ 时，推出不等式

$$\left|\frac{xy - yg(x) + yp(t)}{r^2}\right| = \left|\sin\theta\cos\theta\left(1 - \frac{g(x)}{x}\right) + \sin\theta \cdot \frac{p(t)}{r}\right|$$
$$\leq 1 + (m+1)^2 + E_0 \triangleq q_0,$$

其中

$$E_0=\sup_{0\le t\le 2\pi}|p(x)|.$$

因此不难由(6.14) 式推得不等式

$$r_0e^{-q_0t}\le r(t)\le r_0e^{q_0t},\qquad r(t)\ge 1. \tag{6.15}$$

设

$$\alpha_1=e^{4\pi q_0}\quad 和\ r_0\ge\alpha_1,$$

则不等式(6.15) 蕴含下面的不等式:

$$\frac{r_0}{\alpha_1}\le r(t)\le\alpha_1r_0,\qquad 0\le t\le 4\pi, \tag{6.16}$$

这就证明了，只要初值$r_0\ge\alpha_1$, 就有不等式(6.16) 成立. 以下永远设$r_0\ge\alpha_1$.

另一方面，由于

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,$$

以及$p(t)$ 的有界性，存在常数$A_0>0$, 使得

$$xg(x)\Big(1-\frac{p(x)}{g(x)}\Big)\ge\frac{1}{2}xg(x)>0,\qquad 当\ |x|\ge A_0,$$

从而利用

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=-y^2-x[g(x)-p(t)] \tag{6.17}$$

可得

$$r^2\frac{d\theta}{dt}<-y^2-\frac{1}{2}xg(x)<0,\qquad 当\ |x|\ge A_0,$$

而且当$|x| \le A_0$ 时，$|x[g(x)-p(t)]|$ 是有界的. 令

$$M_0 = \sup_{\substack{|x|\le A_0 \\ t\in[0,2\pi]}} |x[g(x)-p(x)]|.$$

另一方面，当$|x| \le A_0$ 时，利用不等式(6.16) 可以推出

$$y^2 \ge \left(\frac{r_0}{\alpha_1}\right)^2 - x^2 \ge \left(\frac{r_0}{\alpha_1}\right)^2 - A_0^2,$$

因此由(6.17) 式，我们有

$$r^2\frac{d\theta}{dt} \le -\left(\frac{r_0}{\alpha_1}\right)^2 + A_0^2 + M_0 < 0, \qquad \text{只要 } r_0 > \sqrt{\alpha_1^2(M_0+A_0^2)}.$$

总结上面的讨论，得到如下结论：只要

$$r_0 > \max\{\alpha_1,\ \sqrt{\alpha_1^2(M_0^2+A_0^2)}\}$$

就有不等式(6.16) 及不等式

$$\frac{d\theta}{dt} < 0, \qquad 0 \le t \le 4\pi. \tag{6.18}$$

以下设r_0 充分大，使得(6.16) 和(6.18) 成立. 这就是说，只要r_0 充分大，(6.13) 式在(x,y) 平面上当$0 \le t \le 4\pi$ 时绕原点顺时针转动. 设它绕原点k 圈所需的时间为$\tau_k = \tau_k(r_0,\theta_0)$. 本节的一个重要步骤是估计$\tau_m$ 和τ_{m+1} 的大小.

引理 3 若$g(\cdot) \in C_m$，则只要r_0 充分大，就有不等式

$$\tau_m(r_0,\theta_0) < 2\pi < \tau_{m+1}(r_0,\theta_0). \tag{6.19}$$

证明 首先作一个坐标变换，以便计算τ_m 和τ_{m+1} 时比较简便. 我们将要利用坐标变换

$$u = x, \quad v = \frac{1}{k}y \qquad \left(u_0 = x_0, v_0 = \frac{1}{k}y_0\right), \tag{6.20}$$

$k = m(m \geq 1)$ 或$m+1$, 及相应的极坐标

$$u = \rho\cos\varphi, \quad v = \rho\sin\varphi \qquad (u_0 = \rho_0\cos\varphi_0, v_0 = \rho_0\sin\varphi_0).$$

此时(6.13) 在变换(6.20) 下可以表成

$$u = u(t, u_0, v_0), \qquad v = v(t, u_0, v_0) \tag{6.21}$$

或

$$\rho = \rho(t, \rho_0, \varphi_0), \qquad \varphi = \varphi(t, \rho_0, \varphi_0).$$

因为$\rho^2 = r^2(\cos^2\theta + \frac{1}{k^2}\sin^2\theta)$, 所以我们有

$$\frac{1}{k}r \leq \rho \leq r. \tag{6.22}$$

从而由(6.16) 和(6.22) 推出

$$\frac{\rho_0}{\alpha_1 k} \leq \frac{r_0}{\alpha_1 k} \leq \rho(t) \leq \alpha_1 r_0 \leq \alpha_1 k\rho_0, \qquad 0 \leq t \leq 4\pi. \tag{6.23}$$

由此可见, $\rho(t)$ 是充分大的当且仅当ρ_0 (或r_0) 是充分大.

又由

$$\varphi(t) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{k}\mathrm{tg}\theta(t)\right)$$

推出

$$\varphi'(t) = \frac{k}{k^2\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)}\theta'(t).$$

由此可见, $\varphi'(t)$ 与$\theta'(t)$ 同号. 因此, 根据上面的讨论可知, (6.21) 式在(u, v) 平面上当$0 \leq t \leq 4\pi$ 时绕原点作顺时针的转动(只要ρ_0 充分大). 而且由关系式

$$\theta(\tau_l) - \theta_0 = -2l\pi$$

可以推出

$$\varphi(\tau_l)-\varphi_0=\int_0^{\tau_l}\frac{k\theta'(t)}{k^2\cos^2\theta(t)+\sin^2\theta(t)}\,dt$$
$$=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}\,\theta(t)\right)\Bigg|_{\theta_0}^{\theta(\tau_l)}=-2l\pi.$$

反之$\varphi(\tau_l)-\varphi_0=-2l\pi$ 也蕴含$\theta(\tau_l)-\theta_0=-2\pi l$.

这就是说，(6.13) 式在(x,y) 平面上绕原点l 圈所用的时间$\tau_l(r_0,\theta_0)$ 和(6.21) 式在(u,v) 平面上绕原点l 圈所用的时间$\tau_l(\rho_0,\varphi_0)$ 是相等的.

现在，我们来估计τ_m.

因为$\tau_0=0$, 所以$\tau_0<2\pi$ 自然成立. 下面再讨论$m\geq 1$ 的情形. 设$g(x)=m^2x+h(x)$, 则$g(\cdot)\in G_m$ 蕴涵$0\leq h'(x)\leq 2m+1$. 因此，$h(x)$ 是单调非减的，而且满足$xh(x)\geq 0$. 另一方面，$g(\cdot)\in G_m$ 也蕴涵

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=\infty.$$

我们不妨设

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty}h(x)\leq -2B, \tag{6.24}$$

其中$B\geq 0$ 为某一常数. 由$h(x)$ 的单调性及(6.24) 式，不难断言：任给充分大的常数$A>0$, 存在常数$a>0$, 使得

$$xh(x)>Ax\mathrm{tg}^{-1}x,\qquad x\geq a \tag{6.25}$$

和

$$xh(x)\geq Bx\,\mathrm{tg}^{-1}x,\qquad x\leq -a \tag{6.26}$$

成立.

令

$$u = x, \quad v = \frac{1}{m} y \qquad \left(u_0 = x_0, v_0 = \frac{1}{m} y_0\right)$$

和

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi \qquad (u_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, v_0 = \rho_0 \sin \varphi_0),$$

则微分系统(6.11) 等价于

$$\frac{du}{dt} = mv, \qquad \frac{dv}{dt} = -mu - \frac{1}{m} h(u) + \frac{1}{m} p(t). \tag{6.27}$$

而(6.13) 式对应于运动

$$u = u(t, u_0, v_0), \qquad v = v(t, u_0, v_0) \tag{6.28}$$

或

$$\rho = \rho(t, \rho_0, \varphi_0), \qquad \varphi = \varphi(t, \rho_0, \varphi_0). \tag{6.29}$$

以下我们对运动(6.28) (或(6.29)) 来估计$\tau_m[\rho_0, \varphi_0]$.

根据前面的讨论，只要初值ρ_0 充分大，就有不等式

$$\frac{\rho_0}{a} \leq \rho(t) \leq a\rho_0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{6.30}$$

其中a 是一个常数.

由(6.27) 式可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = -m\Phi, \tag{6.31}$$

其中

$$\Phi = 1 + \frac{1}{m^2 \rho^2} u h(u) - \frac{1}{m^2 \rho^2} p(t) \cos \varphi > 0,$$

只要$0 \leq t \leq 4\pi$ 和ρ_0 充分大. 从而$\varphi = \varphi(t)$ 是t 的递减函数，它的反函数$t = t(\varphi)$ 存在且连续. 这样一来，上述Φ 可表示成φ 的连续函数.

利用(6.31) 式，我们可以推得

$$\tau_m[\rho_0,\varphi_0]=\int_{\varphi_0-2m\pi}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{m\Phi}. \tag{6.32}$$

设$\rho_0>0$ 充分大，令

$$\sigma=\frac{\pi\alpha a}{2\rho_0}.$$

则我们有

$$\rho\cos\varphi\geq\frac{\rho_0}{\alpha}\sin\sigma\geq\frac{2\rho_0}{\pi\alpha}\sigma=a,\varphi\in\left[\frac{-\pi}{2}+\sigma,\frac{\pi}{2}-\sigma\right] \tag{6.33}$$

和

$$\begin{aligned}&\rho\cos\varphi\leq-\frac{\rho_0}{\alpha}\sin\sigma\leq\frac{-2\rho_0}{\pi\alpha}\sigma=-a,\\&\varphi\in\left[\frac{-3\pi}{2}+\sigma,\frac{-\pi}{2}-\sigma\right].\end{aligned} \tag{6.34}$$

我们暂且设$\varphi_0\in\left[-\frac{\pi}{2}+\sigma,\ \frac{\pi}{2}-\sigma\right]$. 对于其他情形，处理的方法是一样的. 然后，我们把(6.32) 式改写成

$$\tau_m[\rho_0,\varphi_0]=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(I_{1j}+I_{2j}+I_{3j}+I_{4j}+I_{5j}),$$

其中

$$\begin{aligned}&I_{1j}=\int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{-2j\pi+\varphi_0}\frac{d\varphi}{\Phi},\qquad I_{2j}=\int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}-\sigma}^{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma}\frac{d\varphi}{\Phi},\\&I_{3j}=\int_{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}+\sigma}^{-2j\pi-\frac{\pi}{2}-\sigma}\frac{d\varphi}{\Phi},\qquad I_{4j}=\int_{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}-\sigma}^{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}+\sigma}\frac{d\varphi}{\Phi},\\&I_{5j}=\int_{-2(j+1)\pi+\varphi_0}^{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}-\sigma}\frac{d\varphi}{\Phi},\qquad(j=0,1,\cdots,m-1).\end{aligned}$$

我们将分别估计上述各个积分.

先利用(6.33), (6.25) 和(6.30), 我们推出

$$I_{1j}=\int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{-2j\pi+\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{1}{m^2\rho^2}[uh(u)-up(t)]}$$

$$<\int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{-2j\pi+\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{A}{m^2\rho^2}u\mathrm{tg}^{-1}u-\dfrac{E_0}{m^2\rho}}$$

$$<\int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{-2j\pi+\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{A}{m^2\alpha^2\rho_0^2}\cdot\dfrac{\rho_0}{\alpha}\cos\varphi\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\rho_0\cos\varphi}{\alpha}-\dfrac{\alpha E_0}{m^2\rho_0}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{1}{m^2\rho_0}\left[\dfrac{A}{\alpha^3}\cos\varphi\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\rho_0\cos\varphi}{\alpha}-\alpha E_0\right]}.$$

同样可得到

$$I_{5j}<\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\sigma}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{1}{m^2\rho_0}\left[\dfrac{A}{\alpha^3}\cos\varphi\cdot\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\rho_0\cos\varphi}{\alpha}-\alpha E_0\right]}.$$

因此，当ρ_0 充分大时，我们有

$$I_{1j}+I_{5j}<\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\frac{\pi}{2}-\sigma}\frac{d\varphi}{1+\dfrac{1}{m^2\rho_0}\left[\dfrac{A}{\alpha^3}\cos\varphi\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\rho_0\cos\varphi}{\alpha}-\alpha E_0\right]}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\frac{\pi}{2}-\sigma}\left\{1-\frac{1}{m^2\rho_0}\left[\frac{A}{\alpha^3}\cos\varphi tg^{-1}\frac{\rho_0\cos\varphi}{\alpha}-\alpha E_0\right]\right\}d\varphi$$

$$+O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right)$$

$$=(\pi-2\sigma)+\frac{\alpha E_0}{m^2\rho_0}(\pi-2\sigma)-\frac{AJ(\rho_0)}{m^2\alpha^2\rho_0}+O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right).$$

再利用引理2, 我们得到

$$I_{1j}+I_{5j}<(\pi-2\sigma)-\left(\frac{A}{\alpha^3}-\alpha E_0\right)\frac{\pi}{m^2\rho_0}+O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right),\qquad(6.35)$$

用同样的手法，并注意(6.34), (6.26) 和(6.30), 我们又得到

$$I_{j3} < (\pi - 2\sigma) - \left(\frac{B}{\alpha^3} - \alpha E_0\right)\frac{\pi}{m^2\rho_0} + O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right). \tag{6.36}$$

另一方面，由(6.30) 及σ 的定义易知

$$I_{2j} = \int_{-2j\pi-\frac{\pi}{2}-\sigma}^{-2j\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma} \frac{d\varphi}{1+O\left(\frac{1}{\rho_0}\right)} = 2\sigma + O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right) \tag{6.37}$$

和

$$I_{4j} = \int_{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}-\sigma}^{-2j\pi-\frac{3\pi}{2}+\sigma} \frac{d\varphi}{1+O\left(\frac{1}{\rho_0}\right)} = 2\sigma + O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right). \tag{6.38}$$

因此，由(6.34)-(6.38) 式，我们有

$$\tau_m[\rho_0,\varphi_0] < \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[2(\pi-2\sigma) - \left(\frac{A+B}{\alpha^3} - 2\alpha E_0\right)\frac{\pi}{m^2\rho_0} + 4\sigma + O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right)\right].$$

因为我们可以选取充分大的A, 使得

$$\frac{A+B}{\alpha^3} - 2\alpha E_0 > 0.$$

从而只要$\rho_0 > 0$ 充分大，我们就有$\tau_m[\rho_0,\varphi_0] < 2\pi$. 从而，只要$r_0$ 充分大，我们就有

$$\tau_m(r_0,\theta_0) < 2\pi. \tag{6.39}$$

接着，我们再估计$\tau_{m+1}(m \geq 0)$.

由于对τ_{m+1} 的估计法与上面对τ_m 的估计法相同，因此我们在下面只叙述主要步骤.

令$g(x)=(m+1)^2x+f(x)$, 则由$g(\cdot)\in G_m$ 推出

$$-2m-1\le f'(x)\le 0.$$

从而$f(x)$ 是单调非增的，而且$xf(x)\le 0$. 另外$g(\cdot)\in G_m$ 蕴含

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$$

我们不妨设

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\ge 2B_1, \tag{6.40}$$

其中B_1 是一个常数. 由$f(x)$ 的单调性和(6.40) 式不难断言：任给充分大的常数$A_1>0$, 存在常数$a>0$, 使得

$$xf(x)<-A_1 xtg^{-1}x, \qquad x\ge a \tag{6.41}$$

和

$$xf(x)\le -B_1 xtg^{-1}x, \qquad x\le -a \tag{6.42}$$

成立.

设

$$u=x, \qquad v=\frac{1}{m+1}y\ \left(u_0=x_0,\ v_0=\frac{1}{m+1}y_0\right)$$

和

$$u=\rho\cos\varphi, \qquad v=\rho\sin\varphi\ (u_0=\rho_0\cos\varphi_0, \quad v_0=\rho_0\sin\varphi_0),$$

则微分系统(6.11) 等价于

$$\frac{du}{dt}=(m+1)v, \qquad \frac{dv}{dt}=-(m+1)u-\frac{1}{m+1}[f(u)-p(t)]. \tag{6.43}$$

而运动(6.13) 对应于运动

$$u=u(t,u_0,v_0),\qquad v=v(t,u_0,v_0) \tag{6.44}$$

或

$$\rho=\rho(t,\rho_0,\varphi_0)>0,\qquad \varphi=\varphi(t,\rho_0,\varphi_0).$$

类似于(6.32) 式的推导，从(6.43) 不难得出

$$\tau_{m+1}[\rho_0,\varphi_0]=\int_{\varphi_0-2(m+1)\pi}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{(m+1)\Psi}, \tag{6.45}$$

这里

$$\Psi=1+\frac{1}{(m+1)^2\rho^2}uf(u)-\frac{1}{(m+1)^2\rho}p(t)\cos\varphi>0,$$

只要$0\le t\le 4\pi$ 和ρ_0 充分大.

比较(6.45) 与(6.32) 式，以及(6.41), (6.42) 和(6.25), (6.26) 式，不难得到

$$\tau_{m+1}[\rho_0,\varphi_0]>2\pi.$$

从而

$$\tau_{m+1}[r_0,\theta_0]>2\pi, \tag{6.46}$$

只要r_0 充分大.

联合(6.39) 与(6.46), 即得(6.19). ∎

2.6.4 定理 2.6.2 的证明

令$g\in G_m$ 和$p(\cdot)\in P$. 然后考虑微分系统(6.11) 和其运动(6.13) 式.

设$\tau_m(r_0,\theta_0)<2\pi$, 即(6.13) 顺时针绕原点$m$ 圈所需的时间小于2π. 另一方面，当$0\le t\le 4\pi$ 时，已知(6.13) 是按顺时针绕原点转动的. 因此，它用2π 的时间对原点转动的圈数多于m, 亦即

$$\theta(2\pi,r_0,\theta_0)-\theta_0<-2m\pi.$$

同样，设$\tau_{m+1}(r_0,\theta_0)>2\pi$，则

$$\theta(2\pi,r_0,\theta_0)-\theta_0>-2(m+1)\pi.$$

这就证明了：不等式(6.19) 蕴涵

$$-2(m+1)\pi<\theta(2\pi,r_0,\theta_0)-\theta_0<-2m\pi, \tag{6.47}$$

只要r_0 充分大.

现在，我们在(6.13) 中令$t=2\pi$，且设

$$\begin{aligned} &x_1=x(2\pi,x_0,y_0), \qquad y_1=y(2\pi,x_0,y_0) \\ &(x_1=r_1\cos\theta_1, \qquad y_1=r_1\sin\theta_1). \end{aligned} \tag{6.48}$$

任给充分大的$b>0$，考虑二维圆盘$D(b)$ 和一切初值点$(x_0,y_0)\in D(b)$，则关系式(6.48) 确定了一个拓扑映射(Poincaré 映射)

$$T:D(b)\to \mathbb{R}^2, \qquad (x_0,y_0)\mapsto(x_1,y_1).$$

因(x_0,y_0) 的幅角是θ_0，而(x_1,y_1) 的幅角是$\theta_1=\theta(2\pi,r_0,\theta_0)$. 所以由(6.47) 式可见

$$-2(m+1)\pi<\theta_1-\theta_0<-2m\pi \qquad (x_0,y_0)\in\partial D(b) \tag{6.49}$$

对充分大半径b 成立；而且(6.49) 式蕴涵

$$(x_1,y_1)\neq\lambda(x_0,y_0), \qquad (x_0,y_0)\in\partial D(b) \tag{6.50}$$

对$\forall\lambda>0$ 成立. 由此容易推出

$$(x_1-x_0)x_0+(y_1-y_0)y_0\neq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2} \qquad (x_0,y_0)\in\partial D(b) \tag{6.51}$$

对充分大的b成立. 现在, 取定充分大的$b > 0$, 使得(6.51) 成立. 据引理1, T 至少有一个不动点$(x^*, y^*) \in D(b)$.

最后, 考虑微分系统(6.11) 以(x^*, y^*) 为初始点的解:

$$x = x(t, x^*, y^*), \qquad y = y(t, x^*, y^*). \tag{6.52}$$

因为$T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$, 所以

$$x^* = x(2\pi, x^*, y^*), \qquad y^* = y(2\pi, x^*, y^*). \tag{6.53}$$

显见, (6.53) 蕴含了(6.52) 式是微分系统(6.11) 式的一个2π 周期解. 从而$x = x(t, x^*, y^*)$ 是微分方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t) \qquad \big(g(\cdot) \in G_m, p(\cdot) \in P\big)$$

的一个2π 周期解. ∎

注 2 在定理2.6.2 中, 条件(6.2) 中的$g(0) = 0$ 可以去掉. 这是因为方程(6.1) 总可以等价地改写成

$$\ddot{x} + \big[g(x) - g(0)\big] = \big[p(t) - g(0)\big]. \tag{6.54}$$

当g 满足

$$m^2 \le g'(x) \le (m+1)^2, \tag{6.55}$$

$p(\cdot) \in P$ 时, 易见$[g(\cdot) - g(0)] \in H_m$, 而$[p(\cdot) - g(0)] \in P$.

2.6.5 Duffing 方程 2π 周期解的唯一性

考虑Duffing 方程(6.1) 的2π 周期解的存在唯一性. 我们假定$p(\cdot) \in P$; $g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足存在$u_0 \in \mathbb{R}$, 使$g(u_0) > 0$.

进一步, 假设存在非负整数m, 使

(H1) $$m^2 \le g'(x) \le (m+1)^2,$$

(H2) $\chi[g] = \min\{ \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - m^2x|,$
$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - (m+1)^2x|\} = +\infty,$

(H3) $\text{int}\, A = \emptyset,$

其中$A = \{x \in \mathbb{R} \mid g'(x) = m^2$ 或$(m+1)^2\}$.

定理 2.6.5 方程(6.1) 对$\forall p(\cdot) \in P$ 均有且仅有一个2π 周期解的充分必要条件是(H1)-(H3) 同时成立.

在证明之前，先介绍两个引理.

引理4 设m 是一个给定的非负整数，使

$$m^2 < \frac{g(x)-g(y)}{x-y} < (m+1)^2 \tag{6.56}$$

对$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ 成立，则(6.1) 至多有一个2π 周期解.

证明 反设$x(t), y(t)$ 均为(6.1) 的2π 周期解，$x(t) \neq y(t)$ 对某$t \in \mathbb{R}$ 成立，则

$$\ddot{x}(t) - \ddot{y}(t) + g(x(t)) - g(y(t)) = 0. \tag{6.57}$$

设

$$x(t) - y(t) = r(t)\cos\theta(t), \qquad \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = r(t)\sin\theta(t). \tag{6.58}$$

不难验证$r(t)$ 是一个2π 周期函数，$r(t) \neq 0$ 同时

$$\cos\theta(2\pi) = \cos\theta(0), \qquad \sin\theta(2\pi) = \sin\theta(0). \tag{6.59}$$

利用(6.57) 和(6.58), 我们得

$$\begin{aligned} -\frac{d\theta}{dt} &= \sin^2\theta(t) + \cos\theta(t)\frac{g(x(y)) - g(y(t))}{r(t)} \\ &= \begin{cases} \sin^2\theta(t) + \cos^2\theta(t)\dfrac{g(x(t)) - g(y(t))}{x(t) - y(t)} & x \neq y \\ 1 & x = y. \end{cases} \end{aligned}$$

易见$\frac{d\theta}{dt} < 0$. 记T_i 为$\theta(t)$ 从θ_0 降到$\theta_0 - 2(m+i)\pi$ $(i = 0,1)$ 所用的时间，则我们有

$$T_0 = \int_0^{T_0} d\theta = \int_{\theta_0 - 2m\pi}^{\theta_0} \frac{rd\theta}{\sin^2\theta + \cos\theta(g(x) - g(y))}$$
$$< \int_{\theta_0 - 2m\pi}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + m^2\cos^2\theta} = 2\pi.$$

同理，$T_1 > 2\pi$. 于是我们得到

$$2m\pi < \theta(2\pi) - \theta(0) < 2(m+1)\pi,$$

这与(6.59) 矛盾！

引理 5 设$f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 若存在$x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 < x_1$ 使$f(x_1)\cdot f(x_0) < 0$, 且$\mathrm{int}\,\{x \mid f(x) = 0\} = \phi$. 则存在$y \in [x_0, x_1]$ 满足$f(y) = 0$, 使在y 的任何邻域内均存在y_1, y_2, 满足$f(y_1)\cdot f(y_2) < 0$.

证明略.

定理 2.6.5 的证明

(I) 充分性：由定理2.6.2 及注2, 在条件(H1), (H2) 下，(6.1) 的2π 周期解是存在的. 不难验证，条件(H1), (H3) 蕴涵

$$m^2 < \frac{g(x) - g(y)}{x - y} < (m+1)^2$$

对$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ 成立. 利用引理4 我们得到(6.1) 2π 周期解的唯一性.

(II) 必要性：首先证g 满足(H3). 反设不然. 即存在$x_0 \in \mathrm{int}\, A$, 及实数$\delta > 0$, 使邻域$U(x_0, \delta) \subset A$. 不妨设$\forall x \in U(x_0, \delta)$, 均有$g'(x) = m^2$. 考虑方程

$$\ddot{x} + g(x) = g(x_0), \tag{6.60}$$

我们知道，当$L<<1$ 时，$x=x_0+L\cos mt$ 均为(6.60) 的解. 这与解的唯一性矛盾.

现证$g'(x)\geq 0$ $(x\in \mathbb{R})$, 反设不然，则存在y_0： $g'(y_0)<0$. 不失一般性，我们设$y_0<u_0$. 由于$g'(u_0)>0$, 故我们可以找到两点$z_1,z_0\in[y_0,u_0]$ 使$g(z_1)=g(z_2)$. 考察方程

$$\ddot{x}+g(x)=g(z_1). \tag{6.61}$$

显然$x=z_1$ 和$x=z_2$ 均为(6.61) 的2π 周期解. 这与唯一性矛盾.

下证(H1) 成立. 设I =Im $(g'(\cdot))$. 假设$n^2\in$ int I,n 是一个整数. 从$g'(x)\geq 0$ 知$n^2\geq 1$. 考察函数$f(x)=g'(x)-n^2$. 易见$f(x)$ 满足引理5 的全部条件. 于是我们能得到一点x_0 及两个序列$\{y_i\},\{w_i\}:y_i\to x_0,w_i\to x_0(i\to\infty)$, 而$f(w_i)>0,f(y_i)<0$. 即$g'(y_i)<n^2,g'(w_i)>n^2$. 考虑方程

$$\ddot{x}+g(x)=g(x_0) \tag{6.62}$$

(6.62) 有一个中心$(x_0,0)$, 其所有轨线均为围绕$(x_0,0)$ 的闭轨. 用Γ 记这些轨线中过$(x_0+1,0)$ 的一条轨线，并设其周期为$\tau(\Gamma)$; 从唯一性可知$\tau(\Gamma)\neq\frac{2\pi}{n}$. 我们不妨设$\tau(\Gamma)-\frac{2\pi}{n}\geq\delta>0$. 现在我们考察一列方程

$$\ddot{x}+g(x)=g(w_i),\qquad i=1,2,\cdots. \tag*{$(6.63)_i$}$$

记Γ_i 为$(6.63)_i$ 的通过$(x_0+1,0)$ 点的轨线并记其周期为$\tau(\Gamma_i),i=1,2,\cdots$. 从$w_i\to x_0$ 知，$\lim_{i\to+\infty}\tau(\Gamma_i)=\tau(\Gamma)$. 于是当$k$ 充分大时，我们有

$$\tau(\Gamma_k)>\frac{2\pi}{n}. \tag{6.64}$$

另一方面，任何靠近中心$(w_k,0)$ 的轨线的周期均为

$$\frac{2}{[g'(w_k)]^{\frac{1}{2}}}<\frac{2\pi}{n}\qquad(k>>1). \tag{6.65}$$

从(6.64) 和(6.65) 可知，在中心$(w_k,0)$ 与轨线Γ_k 之间，存在一个闭轨$H_k, \tau(H_k)=\frac{2\pi}{n}$. 于是我们得到$(6.63)_k$ 的两个周期解：$x=w_k$ 和H_k, 对$\forall k>>1$. 这于唯一性矛盾. 故$n^2 \in \text{int } I$. 故(H1) 成立.

最后证(H2) 成立. 反设不然，i.e. $\chi[g]=M<+\infty$. 不妨设$\chi(g)=\sup_{x\in \mathbb{R}}|g(x)-m^2x|$. 记$h(x)=g(x)-m^2x$. 考察方程

$$\ddot{x}+g(x)=3M\cos mt. \tag{6.66}$$

设$x=\varphi(t)$ 是(6.66) 的一个2π 周期解，则$\varphi(t)$ 也是方程

$$\ddot{x}+m^2x=3M\cos mt-h(\varphi(t)) \tag{6.67}$$

的一个2π 周期解. 从(6.67) 可知

$$\int_0^{2\pi}\cos mt(3M\cos mt-h(\varphi(t))\,dt=0. \tag{6.68}$$

从(6.68) 推得

$$\begin{aligned}3M\pi&=\int_0^{2\pi}3M\cos^2 mt\,dt=\int_0^{2\pi}h(\varphi(t))\cos mt\,dt\\&\le\int_0^{2\pi}|\cos mt(h(\varphi(t)))|\,dt\le M\int_0^{2\pi}dt=2M\pi.\end{aligned}$$

但由(H3) 推知$\chi[g]=M\neq 0$. 又得矛盾. ∎

附注 II

1. 半线性Duffing 方程2π 周期解的存在性研究起始于Lond [59], 此后各种非线性分析方法逐渐被用于该方程的研究，如拓扑度、临界点理论、时间映象估计和相平面分析法等. 半线性Duffing 方程周期边值问题成了检验各种分析工具的试金石. 本章末介

绍延拓定理在Duffing 方程中的应用. 感兴趣的读者可参阅[56] 及[57] 等.

2. 虽然由原函数给出的

$$\lambda_N \leq \frac{2G(x,u)}{u^2} \leq \lambda_{N+1} \tag{$\star$}$$

型条件允许扰动项跨越多个特征值，但由于($\star$) 型条件下的方程与带不跨特征值扰动的方程在性质上的相近，我们仍将($\star$) 型条件下的文献归入第二章参考文献. 目前，在($\star$) 型条件下从事研究是一个主流. 请参阅[49]–[56].

第三章　线性方程的跨特征值扰动

1970 年，Landesman 和Lazer 首先研究带跨特征值非线性扰动的椭圆边值问题．此后的二十多年间，关于带跨特征值非线性扰动的方程

$$Lu - \lambda_N u = g(\cdot, u) + p$$

(其中$p \in H, H$ 为某Hilbert 空间，$L : D(L) \subset H \to H$ 为一个稠定自伴且具有闭值域的线性算子，λ_N 为L 的特征值) 的讨论是极为普遍的．特别是近十年来，这方面的结果已日臻丰满．

本章将用多种方法处理带跨特征值非线性扰动的问题．重点放在仅跨一个特征值的问题上，最后介绍跨多个特征值的个别结果．我们将逐步实现由有界非线性项向无界非线性项的过渡；逐步实现从渐近一致条件向渐近非一致条件，进而向跨多个特征值的过渡；我们也将突破Landesman-Lazer 条件的限制，建立没有Landesman-lazer 条件的可解性定理．

§ 3.1　Landesman 和 Lazer 的结果 •有界非线性项•临界点理论

设$\Omega \subset I\!R^n$ 为一个有正则边界的有界区域．$\widehat{\lambda}$ 是$-\Delta$ 在区域Ω上，Diriclet 0- 边值下的一个特征值．设$g : I\!R \to I\!R$ 为一个连续函数．设$\lim_{u\to\pm\infty} g(u) = g(\pm\infty)$．问对哪些$h(\cdot) \in L^2(\Omega)$, 方程

$$\begin{aligned} -\Delta u - \widehat{\lambda} u &= g(u) - h \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

有解？

3.1.1 一个抽象临界点定理

我们首先抽象地讨论这个问题. 设X 是一个Hilbert 空间，Y 是一个Banach 空间，并且$X \to Y$ 的嵌入映射τ 是紧的.

设L 是X 上的自伴算子，它的非正谱只含有有穷个特征值，每个特征值至多是有穷重的. 又设$0 \in \sigma(L)$. 记

$$\mathrm{ker}L = \{x \in X \mid Lx = \theta\}.$$

由此

$$\dim \ker L < +\infty. \tag{1.2}$$

设$g_0 \in C^1(Y, I\!R^1)$, 存在常数$M > 0$ 使

$$\|{g'}_0(x)\|_{Y^*} \le M \quad \forall x \in Y, \tag{1.3}$$

其中$\|\cdot\|_{Y^*}$ 表示Y^* 中的范数. 以下用$\langle \cdot \rangle$ 表示X^* 与X 或Y^* 与Y 对偶，(,) 表X 上的内积，$\|\cdot\|$ 表X 上的范数.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ \tau\ } & Y \\ {\scriptstyle\Lambda}\downarrow & & \\ X^* & \xleftarrow[\ \tau^*\ ]{} & Y^* \end{array}$$

并用$\Lambda : X \to X^*$ 表示同构

$$\langle \Lambda x, y \rangle = (x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

考察下列泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - g_0(\tau u), \qquad u \in X, \tag{1.5}$$

则

$$\begin{aligned}\langle J'(u),v\rangle =&(Lu,v)-\langle {g'}_0(\tau u),\tau v\rangle\\ =&\langle \Lambda Lu-\tau^*\circ {g'}_0\circ\tau u,v\rangle,\qquad \forall v\in X,\end{aligned}\tag{1.6}$$

即

$$J'(u)=\Lambda Lu-\tau^*\circ {g'}_0\circ\tau u.\tag{1.7}$$

定理 3.1.1[1] 设L 满足(1.2)，g_0 满足(1.3) 以及

$$g_0(\tau u)\to+\infty\ (\text{或}-\infty),\qquad \text{当}\ \|u\|\to+\infty,\quad u\in\ker L,\tag{1.8}$$

则$J(u)$ 有临界点.

证明 我们仅对$g_0(\tau u)\to+\infty$ 的情形证明，另一种情形证明完全类似.

首先验证J 满足[P.S.] 条件. 设 .

$$\begin{aligned}&|J(u_n)|\le c,\\ &\|J'(u_n)\|\to 0.\end{aligned}$$

记$P^+=\int_{+0}^{\infty}dE_\lambda$, $P^-=\int_{-\infty}^{-0}dE_\lambda$, $P=E_0-E_{-0}$ 其中$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,dE_\lambda$ 是L 的谱分解，按(1.6), 当n 充分大时

$$\begin{aligned}&|(LP^\pm u_n,\,P^\pm u_n)-\langle {g'}_0(\tau P^\pm u_n),\tau P^\pm u_n\rangle|\\ =&|\langle J'(u_n),\,P^\pm u_n\rangle|\le\|P^\pm u_n\|.\end{aligned}\tag{1.9}$$

但

$$\begin{aligned}&|(LP^\pm u_n,\,P^\pm u_n)-\langle {g'}_0(\tau P^\pm u_n),\tau P^\pm u_n\rangle|\\ \ge&\varepsilon_\pm\|P^\pm u_n\|^2-M_1\|\tau P^\pm u_n\|_Y\\ \ge&\varepsilon_\pm\|P^\pm u_n\|^2-M_1\|P^\pm u_n\|,\end{aligned}\tag{1.10}$$

其中$\varepsilon_\pm > 0$ 分别是L 的正谱及负谱到0 的距离，$\|\cdot\|_Y$ 为Y 的范数. 联合(1.9) 和(1.10) 得常数$M_2 > 0$, 使得

$$\|P^\pm u_n\| \le M_2. \tag{1.11}$$

再利用等式

$$\begin{aligned}J(u_n) =& \frac{1}{2}[(LP^+u_n, P^+u_n) + (LP^-u_n, P^-u_n)] \\ &- g_0(\tau Pu_n) - [g_0(\tau u_n) - g_0(\tau Pu_n)]\end{aligned}$$

以及条件

$$\begin{aligned}&\|g_0(\tau u_n) - g_0(\tau u_n)\|_Y \\ \le& M\|\tau(P^+u_n + P^-u_n)\|_Y \\ \le& M_3(\|P^+u_n\| + \|P^-u_n\|) \le M_4,\end{aligned}$$

推得$g_0(\tau Pu_n)$ 有界. 但按条件(1.8), 这便蕴涵了

$$\|Pu_n\| \le M_5.$$

这样就得到：$\{u_n\}$ 是有界的. 由于τ 是紧的，g'_0 连续. 从(1.7) 可见有子列u_{n_i}, 使得ΛLu_{n_i} 在X^* 强收敛. 然而$(P+P^-)X$ 是有穷维子空间，$\{u_{n_i}\}$ 又有子列u_j, 使得$(P+P^-)u_j$ 在X 中收敛；于是ΛLP^+u_j 在X 中收敛. 现在ΛL 在P^+X 上是有连续逆的，从而$P^+u_{n_i}$ 在X 中收敛，P. S. 条件得以验证.

其次，我们用第一章§1.8 例2 中的环绕及定理1.8.6 来证明(1.5) 中的泛函J 有临界点. 今取

$$X_1 = (P^- + P)X, \qquad X_2 = P^+X,$$

则因

$$\begin{aligned}J(P^+u) \geq & \frac{\varepsilon_+}{2}\|p^+u\|^2 - (g_0(\tau P^+u) - g_0(\theta)) - g_0(\theta) \\ \geq & \frac{\varepsilon_+}{2}\|P^+u\|^2 - M\|\tau P^+u\|_Y - g_0(\theta) \\ \geq & \frac{\varepsilon_+}{2}\|P^+u\|^2 - M_1\|P^+u\| - g_0(\theta) \to +\infty,\end{aligned}$$

当$\|P^+u\| \to +\infty$, 所以必有实数β, 使得

$$J|_{X_2} \geq \beta > -\infty$$

(因为τ 是紧的), 而

$$\begin{aligned}&J((P+P^-)u) \\ \leq & -\frac{\varepsilon_-}{2}\|P^-u\|^2 - (g_0(\tau(P+P^-)u) - g_0(\tau Pu)) - g_0(\tau Pu).\end{aligned}$$

又因为

$$|g_0(\tau(P+P^-)u) - g_0(\tau Pu)| \leq M\|P^-u\|,$$

$$g_0(\tau Pu) \to +\infty, \qquad \text{当} \quad \|Pu\| \to +\infty,$$

所以

$$J((P+P^-)u) \to -\infty, \qquad \text{当} \quad \|(P^- + P)u\| \to +\infty.$$

取R 足够大，使得当$\|(P^- + P)u\| \geq R$ 时

$$J((P+P^-)u) < \beta - 1.$$

于是当令

$$S = X_2, \qquad Q = B_R \cap X_1$$

时，J 满足定理1.8.6 的一切条件，所以它有临界点. ∎

3.1.2 Landesman 和 Lazer 的结果

现在回答哪些$h \in L^2(\Omega)$ 使(1.1) 有解？

对于$\forall u \in L^2(\Omega)$, 记$u_+(x) = \max(u(x),0), u_- = (-u)_+$, 从而 $u = u_+ - u_-$.

由定理3.1.1 可推得如下结果：

定理 3.1.2 设$\widehat{\lambda}$ 是$-\Delta$ 的一个特征值. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续的有界函数，记

$$g(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} g(t).$$

若

$$g(-\infty)\int_\Omega v_+ - g(+\infty)\int_\Omega v_- < \int_\Omega hv < g(+\infty)\int_\Omega v_+ - g(-\infty)\int_\Omega v_- \tag{1.12}$$

或者

$$g(+\infty)\int_\Omega v_+ - g(-\infty)\int_\Omega v_- < \int_\Omega hv < g(-\infty)\int_\Omega v_+ - g(+\infty)\int_\Omega v_-. \tag{1.12'}$$

对$\forall v = \ker(-\Delta - \widehat{\lambda}Id)$ 成立，则方程(1.1) 有解.

证明　取$X = H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $L = Id - \widehat{\lambda}K$, $K = (-\Delta)^{-1}$, $g_0(u) = \int_\Omega \left[G(u) - h(x)u\right]$, 其中

$$G(u) = \int_0^u g(t)\,dt,$$

这是因为

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \int_\Omega -\Delta u \cdot v = \int \nabla u \nabla v = (u, v),$$

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, 所以$\Lambda = -\Delta$

$$\Lambda L = (-\Delta - \widehat{\lambda}Id).$$

而

$$\tau^* \circ g'_0 \circ \tau u = g(u) - h(x),$$

所以由(1.7), J 的临界点对应着(1.1) 的解，而条件(1.12) 或(1.12)$'$ 则蕴含了(1.8). 事实上，由于

$$\frac{G(tv(x))}{t} \to \begin{cases} \pm g(\pm\infty)v_\pm(x) & \text{当 } t \to +\infty \\ \pm g(\mp\infty)v_\pm(x) & \text{当 } t \to -\infty, \end{cases}$$

故

$$\frac{g_0(tv)}{t} \to \begin{cases} \int_\Omega g(+\infty)v_+ - \int_\Omega g(-\infty)v_- - \int_\Omega h\cdot v & \text{当 } t \to +\infty \\ \int_\Omega g(-\infty)v_+ - \int_\Omega g(+\infty)v_- - \int_\Omega h\cdot v & \text{当 } t \to -\infty. \end{cases}$$

当$v \in \ker(-\Delta - \widehat{\lambda} Id)$ 时，令$t \to \pm\infty$, (1.12) 蕴含了$g_0(tv) \to +\infty$, (1.12)$'$ 蕴含了$g_0(tv) \to -\infty$. ∎

注 1 定理3.1.2 首先是由Landesman 和 Lazer [66] 于1970 年得到的. 本节的变分证明选自[2].

注 2 条件(1.12) 或(1.12)$'$ 只是(1.1) 有解的充分条件，但不是必要条件. 例如取

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \text{当 } s \ge 0, \\ e^{-s^2} & \text{当 } s \le 0, \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\},$$

则不难验证

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin x \sin y.$$

为

$$\begin{aligned} -\Delta u - 2u = 0 \qquad & x \in \Omega \\ u = 0 \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.13}$$

的解. 作函数$h(x,y)=g(w(x,y))$, 则w 亦为

$$\begin{aligned} -\Delta u-2u+g(u)=h(x,y) \qquad & (x,y)\in\Omega \\ u=0 \qquad & (x,y)\in\partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.14}$$

的解. 但因$w_+=w, w_-=0$, 推知$h(x,y)\equiv 1$.

$$\int_\Omega hw=\int_\Omega w=g(+\infty)\int_\Omega w_+-g(-\infty)\int_\Omega w_-=\int_\Omega w,$$

故(1.12) 不成立.

下面给出(1.1) 可解的一个必要条件:

定理 3.1.3 若g 连续有界.

$$g(-\infty)\le g(s)\le g(+\infty), \qquad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{1.15}$$

则(1.1) 有解的必要条件为: $\forall v\in\ker(-\Delta-\widehat{\lambda}Id)$ 有

$$\begin{aligned} & g(-\infty)\int_\Omega v_+-g(+\infty)\int_\Omega v_-\le\int_\Omega h\cdot v \\ \le & g(+\infty)f_\Omega v_+-g(-\infty)\int_\Omega v_-. \end{aligned} \tag{1.16}$$

证明 记$L^2(\Omega)$ 的范数和内积分别为$\|\cdot\|_0$ 和$(\ ,\ )_0$. 设$u\in H_0^1(\Omega)$ 为(1.1) 的某个解, 则有

$$-\Delta u-\widehat{\lambda}u+g(u)=h, \qquad u\in H_0^1(\Omega) \tag{1.17}$$

对于任意$\varphi\in\ker(-\Delta-\widehat{\lambda}Id)$ 成立, (1.17) 两边同乘以φ, 然后在Ω上分部积分得

$$\int_\Omega g(u)\varphi=\int_\Omega h\varphi.$$

利用(1.15) 可推得

$$\begin{aligned}\int_\Omega h\varphi &= \int_\Omega g(u)\varphi_+ - \int_\Omega g(u)\varphi_- \\ &\le \int_\Omega g(+\infty)\varphi_+ - \int_\Omega g(-\infty)\varphi_- \\ &= g(+\infty)\int_\Omega \varphi_+ - g(-\infty)\int_\Omega \varphi_-.\end{aligned}$$

同理

$$\int_\Omega h\varphi \ge g(-\infty)\int_\Omega \varphi_+ - g(+\infty)\int_\Omega \varphi_-,$$

即(1.16) 成立. ∎

结合定理3.1.2 和定理3.1.3, 我们有

定理 3.1.4 若假定

$$g(-\infty) < g(s) < g(+\infty) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

(注: 不需要假定g 单调), 则(1.1) 可解的充分必要条件为: $\forall v \in \ker(-\Delta - \widehat{\lambda} Id)$, 有

$$g(-\infty)\int_\Omega v_+ - g(+\infty)\int_\Omega v_- < \int_\Omega hv < g(+\infty)\int_\Omega v_+ - g(-\infty)\int_\Omega v_-.$$

§ 3.2 多解定理 • 有界非线性项 • 映象同胚的条件

本节将在$f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为有界函数且满足

$$\lambda_{k-1} < \gamma \le f'_s(x,s) + \lambda_k \le \mu < \lambda_{k+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

的条件下, 研究椭圆方程Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda_k u + f(x,u) &= \widehat{g} \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

的可解性及多解的存在性. 其中$\hat{g} \in L^2(\Omega)$, 而$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域.

3.2.1 记号

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具光滑边界的有界区域. 记$E = W_0^{1,2}(\Omega)$, E 的内积和范数分别为$(\cdot,\cdot)_1$ 和$\|\cdot\|$, 记$L^2(\Omega)$ 的内积和范数分别为$(\cdot,\cdot)$ 和$\|\cdot\|_0$, 记$L^p(\Omega)$ 的范数为$\|\cdot\|_{0,p}$.

对$\forall u, v \in E$, 定义

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v. \tag{2.1}$$

再定义$L: E \to E$

$$(Lu, v)_1 = -((u,v)) = -\int_\Omega \nabla u \nabla v,$$

则L 是一个有界线性自伴算子且L 有无穷多个特征值$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$. 与特征值相对应的特征函数$v_1, v_2, v_3, \cdots$ 构成一个完全正交基.

众所周知, λ_k 有如下变分特性

$$\lambda_k = \min\left\{ \frac{((v,v))}{\|v\|_0^2} \middle| u \in E, (v, v_i) = 0, i = 1, \cdots, k-1 \right\}. \tag{2.2}$$

记$L_k: E \to E$

$$(L_k u, v)_1 = (Lu, v)_1 + \lambda_k(u,v).$$

设$f(x,s): \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足条件:

(H1) $\forall s \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, s)$ 在Ω 上可测;

$$\text{a.e.} \qquad x \in \Omega, \qquad f'_s(x,\cdot) \in C^1.$$

以下为了方便，我们总以$f(s)$ 和$f'(s)$ 表示$f(x,s)$ 和$f'_s(x,s)$.

设$\widehat{g}\in L^2(\Omega)$. 本节考虑Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned}\Delta u+\lambda_k u+f(x,u)=&\widehat{g} \qquad x\in\Omega\\ u=&0 \qquad x\in\partial\Omega\end{aligned} \tag{2.3}$$

的可解性与多解的存在性. 内容选自[74] 及[101].

3.2.2 Lyapunov-Schmidt 过程

除了假设(H1), 我们还假设

(H2) f 为有界函数；

(H3) λ_k 是单重的特征值；

(H4)

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1}<\nu\le\lambda_k+f'(s)\le\mu<\lambda_{k+1}, \qquad &\text{当 } k>1.\\ \nu\le\lambda_1+f'(s)\le\mu<\lambda_2, \qquad &\text{当 } k=1.\end{aligned}$$

为了研究(2.3), 先将(2.3) 转化为E 中的算子方程. 事实上, (2.3) 的弱解是指：一个函数$u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, u 满足

$$-\int_\Omega\nabla u\nabla v+\lambda_k\int_\Omega uv+\int_\Omega f(u)v=\int_\Omega\widehat{g}v, \qquad \forall v\in E.$$

故(2.3) 的弱解是算子方程

$$L_k u+F(u)=g, \qquad u\in E \tag{2.4}$$

的解，其中$F:E\to E$ 定义为

$$(Fu,v)_1=\int_\Omega f(u)v \qquad \forall v\in E.$$

而$g\in E$ 定义为

$$(g,v)_1=\int_\Omega\widehat{g}v \qquad \forall v\in E.$$

由(H2) 和(H4), F 为E 到E 的C^1 映象.

记$V = \ker L_k, W = \mathrm{Im}\, L_k$. 于是$\forall u \in E$ 可唯一分解成$u = tv_k + w, w \in W$. 设P 和Q 分别为到V 和W 上的直交投影. 以P 和Q 分别作用(2.4) 的两边，我们得

$$L_k w + QF(tv_k + w) = Qg, \tag{2.5}$$

$$PF(tv_k + w) = Pg. \tag{2.6}$$

于是我们得到如下事实.

引理 1 (2.4) 等价于系统(2.5) - (2.6).

首先，我们研究(2.5). 固定$t \in \mathbb{R}$, 记$\Phi_t : W \to W$

$$\Phi_t(w) = L_k w + QF(tv_k + w).$$

引理 2 设(H1)-(H4) 成立，则$\Phi_t : W \to W$ 是一个同胚.

证明 用定理1.4.2.

首先证Φ_t 在$\forall w \in W$ 为局部同胚. 考察Φ_t 的Frechet 微分

$$\Phi'_t(w) : z \to L_k z + QF'(tv_k + w)z, \quad z \in W.$$

我们将证明$\Phi'_t(w)z = 0$ 仅有零解(这表明$\Phi'_t(w)$ 可逆，从而Φ_t 在w 为局部同胚.) 记

$$W_1 = \mathrm{span}\{v_i \mid i \geq k+1\}, \qquad W_2 = \mathrm{span}\{v_1 \cdots, v_{k-1}\},$$

则$W = W_1 \oplus W_2, \forall z \in W$ 可唯一地分解成$z = z_1 + z_2, z_1 \in W_1$ 而$z_2 \in W_2$. 设π_i 为到$W_i\,(i = 1, 2)$ 上的直交投影. 由

$$L_k z + QF'(tv_k + w)z = 0 \tag{2.7}$$

推知

$$L_k z_1 + \pi_1 QF'(tv_k + w)z = 0 \tag{2.8}$$

$$L_k z_2 + \pi_2 QF'(tv_k + w)z = 0. \tag{2.9}$$

从(2.8) 和(2.9) 不难得到

$$
\begin{aligned}
&((z_2,z_2))-((z_1,z_1))-\lambda_k\|z_2\|_0^2+\lambda_k\|z_1\|_0^2\\
&=\int_\Omega f'(tv_k+w)z_2^2-\int_\Omega f'(tv_k+w)z_1^2.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

据(2.2) 式及$(z_1,v_i)=0$, $i=1,\cdots,k$ 的事实，推知$((z_2,z_2))\leq\lambda_{k-1}\|z_2\|_0^2$ 及$-((z_1,z_1))\leq-\lambda_{k+1}\|z_1\|_0^2$. 于是从(2.10) 得到$\varepsilon\|z\|_0\leq o$; 即(2.7) 只有零解.

其次证Φ_t 为proper 映象. 因L_k 在W 上有一个有界逆T. 故(2.5) 可以等价地写成

$$w=TQ[g-F(tv_k+w)].$$

如果g 属于E 的一个紧集；由(H2), F 有界，故$w=TQ(g-F(tv_k+w))$ 属于E 的一个紧集. 此即Φ_t 为proper 映象. ∎

固定$g\in E$, 记$w_g(t)\equiv w_{Qg}(t)$ 为方程

$$\Phi_t(w)=Qg$$

的唯一解. 如下引理给出了w_g 的一个先验界.

引理 3 设$g\in E$ 为一固定函数. 则存在常数$C>0$, 使$\|w_g(t)\|\leq C, \forall t\in\mathbb{R}$. 进一步，$w_g(t)$ 是t 的C^1 映象.

证明略.

现将(2.5) 的解$w_g(t)$ 代入(2.6) 的左端，可推得方程

$$\Gamma_g(t)=\int_\Omega\widehat{g}v_k,\tag{2.11}$$

其中

$$\Gamma_g(t)=\Gamma_{Qg}(t)=\int_\Omega f(tv_k+w_g(t))v_k.\tag{2.12}$$

3.2.3 $\Gamma_g(t)$ 的行为

记

$$
\begin{aligned}
&\underline{f}(\pm\infty) = \liminf_{s\to\pm\infty} f(x,s);\\
&\overline{f}(\pm\infty) = \limsup_{s\to\pm\infty} f(x,s)\\
&\underline{b}^+ = \int_{\Omega^+} \underline{f}(+\infty)v_k + \int_{\Omega^-} \overline{f}(-\infty)v_k;\\
&\underline{b}^- = \int_{\Omega^+} \underline{f}(-\infty)v_k + \int_{\Omega^-} \overline{f}(+\infty)v_k;\\
&\overline{b}^+ = \int_{\Omega^+} \overline{f}(+\infty)v_k + \int_{\Omega^-} \underline{f}(-\infty)v_k;\\
&\overline{b}^- = \int_{\Omega^+} \overline{f}(-\infty)v_k + \int_{\Omega^-} \underline{f}(+\infty)v_k;
\end{aligned}
$$

其中

$$\Omega^+ = \{x\in\Omega \mid v_k(x) > 0\}, \qquad \Omega^- = \{x\in\Omega \mid v_k(x) < 0\}.$$

如下引理描述Γ 的性质

引理 4 假设(H1)-(H4) 均成立，则对于固定的$g\in E$, 有

(i) $\limsup_{t\to+\infty}\Gamma_g(t) \le \bar{b}^+$, $\quad \liminf_{t\to+\infty}\Gamma_g(t) \ge \underline{b}^+$;

(ii) $\limsup_{t\to-\infty}\Gamma_g(t) \le \bar{b}^-$, $\quad \liminf_{t\to-\infty}\Gamma_g(t) \ge \underline{b}^-$.

证明 考察

$$\limsup_{t_n\to\infty}\Gamma_g(t) \le \limsup_{t_n\to\infty}\{\int_{\Omega^+} f(t_n v + w_n)v_k + \int_{\Omega^-} f(t_n v + w_n)v_k\}, \tag{2.13}$$

其中$\{t_n\}$ 为趋于$+\infty$ 的任意数列，而$w_n \triangleq w_g(t_n)$. 由引理3 知：存在一个不依赖于n 的常数$C>0$ 使$\|w_n\| \le C$. 因此$\{w_n\}$ 中包含一个子列，我们不妨仍记为$\{w_n\}$, 使$w_n \to \overline{w}$ a.e. 于Ω. 从而

推出：如果$x \in \Omega^+$，则$t_n v_k + w_n \to +\infty$ a.e. 而如果$x \in \Omega^-$，则$t_n v_k + w_n \to -\infty$ a.e. 进一步利用(H2) 及Fatou 引理推知

$$\limsup_{t_n \to +\infty} \int_{\Omega^+} f(t_n v_k + w_n) v_k$$
$$\leq \int_{\Omega^+} \limsup_{t_n \to +\infty} f(t_n v_k + w_n) v_k \leq \int_{\Omega^+} \overline{f}(+\infty) v_k \tag{2.14}$$

及

$$\limsup_{t_n \to +\infty} \int_{\Omega^-} f(t_n v_k + w_n) v_k \leq \int_{\Omega^-} \underline{f}(-\infty) v_k, \tag{2.15}$$

(2.13)、(2.14) 及(2.15) 蕴涵$\limsup_{t \to +\infty} \leq \bar{b}^+$.

同理可证得其余的不等式. ∎

引理 5 设(H1)-(H4) 成立. 进一步假设

(H5) $\underline{f}(\pm\infty) = \overline{f}(\pm\infty) = f(\pm\infty)$

则

(i) $\lim_{t \to \infty} \Gamma_g(t) = \underline{b}^+ = \bar{b}^+ = b^+$;

(ii) $\lim_{t \to -\infty} \Gamma_g(t) = \underline{b}^- = \bar{b}^- = b^-$.

证明 由引理4 立即推出. ∎

3.2.4 存在性定理

定理 3.2.1 设(H1)-(H4) 成立. 则对$\forall g \in E$, $\exists \underline{a}_{Qg} \equiv \underline{a}_g \leq \bar{a}_g \equiv \bar{a}_{Qg}$ 满足

$$\underline{a}_g \leq \min(\bar{b}^+, \bar{b}^-), \qquad \bar{a}_g \geq \max(\underline{b}^+, \underline{b}^-),$$

使得

(i) 当$\int_\Omega \widehat{g} v_k \in (\underline{a}_g, \bar{a}_g)$ 时，(2.3) 至少有一个解；

(ii) 当$\int_\Omega \widehat{g} v_k \notin [\underline{a}_g, \bar{a}_g]$ 时，(2.3) 无解.

进一步，若假设(H5) 成立，则$\underline{a}_g \leq \min(b^+, b^-)$, $\bar{a}_g \geq \max(b^+, b^-)$.

证明　由引理3, $\Gamma_g(t)$ 对t 是连续的. 取$\underline{a}_g = \inf\{\Gamma_g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \overline{a}_g = \sup\{\Gamma_g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. 由此推知: 当$\int_\Omega \widehat{g} v_k \in (\underline{a}_g, \overline{a}_g)$ 时, 方程$\Gamma_g(t) = \int_\Omega \widehat{g} v_k$ 至少有一个解. 故据引理1, $u_g = t_g v_k + w_g(t_g)$ 为(2.3) 的一个解. 而当$\int_\Omega \widehat{g} v_k \notin [\underline{a}_g, \overline{a}_g]$ 时, 方程$\Gamma_g(t) = \int_\Omega \widehat{g} v_k$ 无解, 进而(2.3) 无解.

当假设(H5) 成立时, 由引理5, 立即推得要证. ∎

作为定理3.2.1 的推论, 我们得到如下Landesman-Lazer 型结果.

定理 3.2.2　设(H1)-(H5) 成立. 进一步, 设

$$f(-\infty) < f(s) < f(+\infty), \tag{2.16}$$

则(2.3) 有解的充要条件是$b^- < \int_\Omega \widehat{g} v_k < b^+$.

证明　由(2.16) 推得$b^- < b^+$. 进一步(2.16) 蕴涵

$$\begin{aligned} b^- &= \int_{\Omega^+} f(-\infty) v_k + \int_{\Omega^-} f(+\infty) v_k < \int_\Omega f(u) v_k \\ &< \int_{\Omega^-} f(-\infty) v_k + \int_{\Omega^+} f(+\infty) v_k = b^+. \end{aligned}$$

于是$\underline{a}_g = \inf \Gamma_g(t) \geq b^-, \overline{a}_g = \sup \Gamma_g(t) \leq b^+$. 由定理3.2.1 可知: $\underline{a}_g \leq b^-, \overline{a}_g \geq b^+$, 故

$$\underline{a}_g = b^-, \qquad \overline{a}_g = b^+.$$

至此, 充分性由定理3.2.1 推出. 必要性是显然的. ∎

注　如果将条件(2.16) 换成

$$f(+\infty) < f(s) < f(-\infty),$$

则我们仍能建立类似的结果.

3.2.5 多解定理

本小节将要对f 作更强的假设，以便建立多解的存在性结果.

先考察问题

$$\begin{aligned} \Delta u+\lambda_k u+f(u)=0 \qquad & x\in\Omega, \\ u=0 \qquad & x\in\partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中f 不依赖于x 并且$f(0)=0$. 这便表明$u=0$ 是(2.17) 的一个解. 我们寻找非平凡解.

定理 3.2.3 设(H1)-(H5) 成立. 进一步假定f 不依赖于x 且$f(0)=0, f'(0)<0$, 同时

$$f(-\infty)\int_{\Omega^+} v_k+f(+\infty)\int_{\Omega^-} v_k<0<f(-\infty)\int_{\Omega^-} v_k+f(+\infty)\int_{\Omega^+} v_k, \tag{2.18}$$

则(2.17) 至少有两个不同的非平凡解.

证明　利用3.2.2 中的过程. 这里$g=0$，$f(0)=0$. W 上的方程

$$L_k w+QF(tv_k+w)=0, \tag{2.19}$$

当$t=0$ 时，有解$w_0(0)=0$. 进一步，有

$$\Gamma_0(0)=\int_\Omega f(w_0(0))v_k=0$$

及

$$\Gamma_0'(0)=\int_\Omega f'(0)(v_k+w_0'(0))v_k. \tag{2.20}$$

因$w'_0(0)\in W$, 又$f^1(0)<0$, 从(2.20) 推出$\Gamma'_0(0)<0$. 最后，据引理5 知$\lim_{t\to\infty}\Gamma_0(t)=b^+,\lim_{t\to-\infty}\Gamma_0(t)=b^-$, 结合(2.18) 我们得到

$$\lim_{t\to-\infty}\Gamma_0(t)<0<\lim_{t\to+\infty}\Gamma_0(t),$$

故方程$\Gamma_0(t)=0$至少有两个不同的非零解t_1和t_2. 于是$u_1=t_1v_k+w_0(t_1), u_2=t_2v_k+w_0(t_2)$即为(2.17)的解. ∎

再回到(2.3), 讨论$f(-\infty)=f(+\infty)=0$的情形.

定理 3.2.4 设(H1)–(H5)成立. 进一步假设

$$\lim_{s\to\pm\infty} sf(s)=\mu>0, \tag{2.21}$$

则对$\forall g\in W_0^{1,2}(\Omega), \exists \underline{a}_{Qg}\equiv \underline{a}_g<0<\overline{a}_g\equiv\overline{a}_{Qg}$, 使

(i) (2.3) 有解$\Longleftrightarrow \int_\Omega \widehat{g}v_k\in[\underline{a}_g,\overline{a}_g]$;

(ii) 当$\int_\Omega \widehat{g}v_k\in(\underline{a}_g,\ 0)\cup(0,\ \overline{a}_g)$时, (2.3)至少有两个不同的解.

证明　如果我们证得$\Gamma_g(t)$既取正值又取负值, 则该定理可由3.2.2, 3.2.3及3.2.4中的讨论得到. 为此考察

$$t\Gamma_g(t)=\int_\Omega tf(tv_k+w_g(t))v_k,$$

记

$$\widehat{\Omega}=\{x\in\Omega\mid v_k(x)\neq 0\},$$

则

$$t\Gamma_g(t)=\int_{\widehat{\Omega}}(tv_k+w_g(t))f(tv_k+w_g(t))-\int_{\widehat{\Omega}}f(tv_k+w_g(t))w_g(t). \tag{2.22}$$

现在, 当$x\in\Omega^+$时, 若$t_n\to+\infty$, 则$t_nv_k+w_g(t_n)$中必有子列趋于$+\infty$; 当$x\in\Omega^-$时, 若$t_n\to-\infty$则$t_nv_k+w_g(t_n)$中必有子列趋于$-\infty$. 不论哪种情况, 由条件(2.21)总可导出,

$$\int_\Omega \big(t_nv_k+w_g(t_n)\big)\,f\big(t_nv_k+w_g(t_n)\big)\to\mu|\Omega|.$$

又因

$$\int_{\widehat{\Omega}} f\big(t_nv_k+w_g(i_n)\big)w_g(t_n)$$

当$t_n \to \infty$ 时趋于零，故由(2.22) 我们得

$$t\Gamma_g(t) \to \mu|\Omega| > 0 \qquad \text{当} \quad t \to +\infty.$$

同理得

$$t\Gamma_g(t) \to \mu|\Omega| > 0 \qquad \text{当} \quad t \to -\infty,$$

故当$|t|$ 充分大时，$t\Gamma_g(t)$ 是正的. ∎

例 问题

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_k u + \frac{u}{1+u^2} &= \widehat{g} \quad & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.23}$$

满足定理3.2.4 的全部条件，其中$\widehat{g} \in L^2(\Omega)$.

3.2.6 方程 $\Delta u + \lambda_1 u + f(x,u) = \widehat{g}$

本小节考虑特殊问题

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_1 u + f(x,u) &= \widehat{g} \qquad & x \in \Omega, \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.24}$$

在§1.1 中，我们已经知道，λ_1 是单重的同时λ_1 所对应的特征函数v_1 在Ω 上保号. 不妨设$v_1 > 0$ 于Ω. 由于这些优点，(2.24) 有比(2.3) 更好的结果.

定理 3.2.5 设(H1)–(H5) 成立. 若对$\forall s \in \mathbb{R}, f'(s) \neq 0$, 则(2.24) 有解$\Longleftrightarrow \min(b^-, b^+) < \int_\Omega \widehat{g} v_1 < \max(b^-, b^+)$. 进一步，解是唯一存在的.

证明 我们将证$\Gamma'_g(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

反设不然，即$\exists \bar{t} \in \mathbb{R}$, 使得

$$\Gamma'_g(\bar{t}) = \int_\Omega f'(\bar{t}v_1 + \overline{w})v_1(v_1 + \overline{w}') = 0,$$

其中$\overline{w} = w_g(\overline{t})$ 为

$$\Delta w + \lambda_1 w + QF(\overline{t}v_1 + w) = Qg \tag{2.25}$$

的唯一解. 从(2.25) 推知

$$\Delta\overline{w}' + \lambda\overline{w}' + QF'(\overline{t}v_1 + \overline{w})(v_1 + \overline{w}') = 0.$$

因此，由$\Gamma'_g(\overline{t}) = 0$ 知

$$\Delta\overline{w}' + \lambda_1\overline{w}' + f'(\overline{t}v_1 + \overline{w})(v_1 + \overline{w}') = 0. \tag{2.26}$$

记$\overline{u} = \overline{t}v_1 + \overline{w}$, 则 $\overline{u}' = v_1 + \overline{w}'$, 由(2.26) 可知

$$\Delta\overline{u}' + \lambda_1\overline{u}' + f'(\overline{u})\overline{u}' = 0. \tag{2.27}$$

但从$\lambda_1 + f'(s) < \lambda_2$ (见(H4)) 推知：$\overline{u}' > 0$ 于Ω. 又因

$$\Gamma_g'(\overline{t}) = \int_\Omega f'(\overline{u})v_1\overline{u}'.$$

而$v_1 > 0$ 于$\Omega, f'(s) \neq 0, \forall s \in I\!R$, 故$\Gamma'_g(\overline{t}) \neq 0$ 矛盾！表明$\Gamma'_g(t) \neq 0$. 从而$\Gamma_g(t)$ 严格单调. ∎

下面讨论(2.24) 的多解.

引理 6 假设(H1)-(H5). 进一步设$f(s) > f(+\infty), \forall s > 0$ ($f(s) < f(-\infty), \forall s < 0$). 则$\forall g \in L^\infty(\Omega), \exists \overline{t} > 0$, 使$\Gamma_g(\overline{t}) > \int_\Omega f(+\infty)v_1$ ($\exists \widetilde{t} < 0$, 使$\Gamma_g(\widetilde{t}) < \int_\Omega f(-\infty)v_1$).

证明 固定$g \in L^\infty(\Omega)$. 由椭圆方程正则性理论(见[13]) 不难看出，集合$\{w_g(t) \mid t \in I\!R\}$ 在$C^1(\overline{\Omega})$ 的范数下一致有界. 因此由$v_1 > 0$ 于Ω 推知：存在$\overline{t} > 0$, 使

$$\overline{u} = \overline{t}v_1 + w_g(\overline{t}) > 0.$$

利用$f(s) > f(+\infty), \forall s > 0$ 的题设，我们得到

$$\Gamma_g(\bar{t}) = \int_\Omega f(\bar{u})v_1 > \int_\Omega f(+\infty)v_1.$$

另一结论同理可证. ∎

定理 3.2.6 设(H1)–(H5) 成立. 再设$f(-\infty) = f(+\infty) = 0$ 及

$$sf(s) > 0 \qquad \forall s \neq 0,$$

则$\forall\, g \in L^\infty(\Omega)$, $\exists\, \underline{a}_{Qg} \equiv \underline{a}_g < 0 < \bar{a}_g \equiv \bar{a}_{Qg}$ 使

(i) (2.24) 有解$\Longleftrightarrow \underline{a}_g \leq \int_\Omega \widehat{g}v_1 \leq \bar{a}_g$.

(ii) 当$\int_\Omega \widehat{g}v_1 \in (\underline{a}_g, 0) \cup (0, \bar{a}_g)$ 时，(2.24) 至少有两个不同的解.

证明 引理6 表明$\Gamma_g(t)$ 既取正值又取负值. 结论可仿效定理 3.2.4 的证明得到. ∎

3.2.7 $\lambda_{k-1} \leq \lambda_k + f'(s) \leq \lambda_{k+1}$ 时的结果

若将条件(H4)

$$\begin{cases} \lambda_{k-1} < \nu \leq \lambda_k + f'(s) \leq \mu < \lambda_{k+1}, & k > 1 \\ \nu \leq \lambda_1 + f'(s) \leq \mu < \lambda_2, & k = 1 \end{cases}$$

减弱成条件

$$(\mathrm{H4})' \quad \begin{cases} \lambda_{k-1} \leq \lambda_k + f'(s) \leq \lambda_{k+1}, & k > 1 \\ \nu \leq \lambda_1 + f'(s) \leq \lambda_2, & k = 1. \end{cases}$$

而(H1), (H2), (H3), (H5) 保持不变. 此时，引理2 不再成立. 即$\Phi_t(w) = Qg$, 不再有唯一解，从而集合$\{(t,w) \mid \Phi_t(w) = Qg\}$ 不再是一条“连续曲线” 了！

记$S_t = \{w \in W \mid \Phi_t(w) = Qg\}$. 文[101] 首先用0-epi 映象的解集连通理论证得，对每个固定的$t \in \mathbb{R}$, S_t 是W 中的一个连通集；接着用含参紧向量场的解集连通性质将S_t 串成一条连通分支，最

后以连通分支代替(H4) 下产生的连续曲线. 从而使(H4) 下成立的一些结果得到推广. 例如, [101] 中得到如下.

定理 3.2.7 设(H1), (H2), (H3), (H4)' 成立. 进一步, 假设

$$\lim_{s\to\pm\infty} sf(x,s)=\mu>0,$$

则对$\forall\, g\in W_0^{1,2}$, $\exists\,\tau_1,\tau_2:\tau_1<0<\tau_2$, 使

(i) (2.3) 有解$\Longleftrightarrow \int_\Omega \widehat{g}v_k\in[\tau_1,\tau_2]$;

(ii) 当$\int_\Omega \widehat{g}v_k\in(\tau_1,\,\tau_2)\backslash\{0\}$ 时, (3.2) 至少有两个解.

§ 3.3 椭圆方程•有界非线性项•集连通技巧

本节继续研究椭圆方程Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}-\Delta u-\lambda_1 u-g(u)=&h \qquad x\in\Omega,\\ u=&0 \qquad x\in\partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中$\Omega\subset I\!R^n$ 是一个有光滑边界的有界区域, $g:I\!R\to I\!R$ 为有界的连续函数, $h\in L^2(\Omega)$.

在§3.2 中, 我们在$g\in C'$ 且满足

$$\mu\le\lambda_1+g'(s)\le\nu<\lambda\tag{3.2}$$

等条件下, 较深入地讨论了(3.1) 的解的存在性及多解的存在性. 在那里, 我们将(3.1) 化为集合

$$S_{\overline{h}}=\{(t,w_{\overline{h}}(t))\mid t\in I\!R\}\tag{3.3}$$

(其中$w_{\overline{h}}(t)$ 为方程$L_1w+QG(tv_1+w)=Q\overline{h}$ 的唯一解, 而$(\overline{h},v)_{w_0^{1,2}}=-\int_\Omega hv,\forall v\in w_0^{1,2}(\Omega)$) 上的函数方程

$$\Gamma_{\overline{h}}(t)=\int_\Omega hv_k.\tag{3.4}$$

本节不再需要$g \in C'$, 而只在g 连续有界的前提下讨论问题(3.1). 此时(3.3) 中的$S_{\bar{h}}$ 不再是一条“连续曲线” 了！我们将设法利用集连通理论中的“含有连通分支” 来代替这种“连续曲线” 的作用. 也正是连续函数在连通分支上的介值性才使§3.2 中的一些结果在条件削弱后遗传下来.

本节的论证过程与§3.2 中的颇为相似. 我们仍用到Lyapunov-Schmidt 过程和含参紧向量场的解集连通理论. 在本节最后一个结果(定理3.3.3) 的证明中, 我们利用了上下解方法.

本节主要结果选自[67].

3.3.1 主要结果

定义 $L: D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Lu = -\Delta u - \lambda_1 u, \quad u \in D(L) \tag{3.5}$$

(其中$D(L) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$), 则$L$ 为线性自伴算子. 记$H = L^2(\Omega)$, $V = \ker L$, $V^{\perp} = \operatorname{Im} L$, 则$H = V \oplus V^{\perp}$. $\forall f \in H$, 可唯一地分解成$f = t\varphi + h$; 而$\forall u \in D(L)$ 可唯一地分解成$u = s\varphi + w$. 其中$h, w \in V^{\perp}, t, s \in \mathbb{R}$; φ 为λ_1 所对应的特征函数, 满足$\varphi > 0$ 于Ω. 此时, $L|_{D(L)\cap V^{\perp}}$ 有一个紧逆$K \triangleq (L_{D(L)\cap V^{\perp}})^{-1} : V^{\perp} \to V^{\perp}$. 最后, 设$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为有界连续函数. 记$G : H \to H$ 为g 的Nemytsckii 映象. 则G 连续且一致有界.

这样, Dirichlet 问题(3.1) 能够等价地写成

$$Lu - G(u) = t\varphi + h, \qquad u \in D(L). \tag{3.6}$$

设$P : H \to V, Q : H \to V^{\perp}$ 分别为直交投影. 以P 和Q 分别作用(3.6) 的两边. 我们得

$$Lw - QG(s\varphi + w) = h, \tag{3.7}$$

$$-PG(s\varphi + w) = t\varphi, \tag{3.8}$$

$$(s \in \mathbb{R},\ w \in D(L) \cap V^{\perp}).$$

记

$$S = S_h = \{(s,w) \in \mathbb{R} \times V^\perp \mid w \in D(L), Lw - QG(s\varphi + w) = h\}$$

记

$$T_s(w) = K\big[h + QG(s\varphi + w)\big],$$

再记

$$F_s = \{w \in V^\perp \mid w = T_s(w)\}.$$

则$S = \bigcup_{s\in\mathbb{R}}(\{s\} \times F_s)$. 由$K$ 的紧性及G 的连续且一致有界的事实知，$T_s : V^\perp \to V^\perp$ 为紧算子且$T_s : V^\perp \to \overline{B}_\rho(0)$, 其中$\overline{B}_\rho(0) = \{w \in V^\perp \mid \|w\| \le \rho\}$ 而

$$\rho = \|K\|(\|h\| + \sqrt{\text{meas}\Omega}\sup|g(s)|). \tag{3.9}$$

因此，由Schauder 不动点定理(见定理1.1) 可知，$\forall s, F_s \ne \phi$. 从而有$\text{Proj}_{\mathbb{R}} S = \mathbb{R}$, 且$S \subset \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho(0)$. 至此系统(3.7)-(3.8) 等价于在$S$ 上求解

$$\Phi(s,w) = t, \tag{3.10}$$

其中$\Phi : \mathbb{R} \times V^\perp \to \mathbb{R}$

$$\Phi(s,w) = -\int_\Omega g(s\varphi + w)\varphi\, dx. \tag{3.11}$$

易见Φ 连续有界. 这样我们已经推得如下定理的前半部分.

定理 3.3.1 对$\forall h \in V^\perp$, 均存在有界集$\Lambda_h \subset \mathbb{R}$, 使得(3.1) 有解的充要条件为$t \in \Lambda_h$. 进一步，如果假设$g$ 满足：$g \ne 0$ 及

$$ug(u) \ge 0 \tag{3.12}$$

或

$$(ug(u) \le 0), \tag{3.12'}$$

且$h \in L^\infty(\Omega)$，则Λ_h 包含$t = 0$ 并且Λ_h 包含一个区间$[0,\delta]$ 或$[-\delta,0], \delta > 0$.

在对g 的更强的假设下，可以建立如下多解结果.

定理 3.3.2 除定理3.3.1 的全部假设外，我们还假定$g(\pm\infty) = \lim_{u\to\pm\infty} g(u) = 0$, 则$\Lambda_h$ 为有界闭集且存在区间$\Lambda_h^* \subset \Lambda_h$: $\mathrm{Int}\,\Lambda_h^* \neq \phi$ 使

(i) 若$t \notin \Lambda_h$, (3.1) 无解；

(ii) 若$t \in \Lambda_h$, (3.1) 至少有一个解；

(iii) 若$t \in \Lambda_h^*$, 则(3.1) 至少有两个解.

现在自然要问，在什么条件下，Λ_h 本身即为一个区间呢？如下定理给出了Λ_h 为区间的一个充分条件.

定理 3.3.3 除定理3.3.2 的全部假设外，我们还假定g 是一个局部μ-Hölder 连续函数. 则对$\forall h \in C^\mu(\overline{\Omega})$, Λ_h 是一个有界闭区间.

3.3.2 定理的证明

我们先给出几个引理.

引理 1 假设极限$\lim_{u\to\pm\infty} g(u) = g(\pm\infty)$ 存在. $W \subset C_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ 于 } \partial\Omega\}$ 为一个有界集，则$\lim_{s\to\pm\infty} \Phi(s,w) = -g(\pm\infty)\int_\Omega \varphi dx$ 对$w \in W$ 一致地成立.

证明 任给$\varepsilon > 0$, 作$\partial\Omega$ 的开邻域Ω_ε, 使$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi dx < \varepsilon$. 由于$\varphi > 0$ 于Ω, 故$\lim_{s\to\pm\infty} g(s\varphi(x) + w(x)) = g(\pm\infty)$ 对$x \in \Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ 及$w \in W$ 一致成立；于是，从

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(s,w) - (-g(\pm\infty)\int_\Omega \varphi\, dx)| \\
\le& \int_{\Omega_\varepsilon} |g(\pm\infty) - g(s\varphi + w)|\varphi\, dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |g(\pm\infty) - g(s\varphi + w)|\varphi\, dx \\
\le& 2\sup|g(u)|\varepsilon + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |g(\pm\infty) - g(s\varphi + w)|\varphi\, dx
\end{aligned}
$$

推知

$$\limsup_{s\to\pm\infty}|\Phi(s,w)-(-g(\pm\infty))|\le 2\sup|g(u)|\varepsilon$$

对$w\in W$ 一致成立. 由ε 的任意性, 即得要证. ▮

引理 2 设$W\subset C_0^1(\overline{\Omega})=\{u\in C'(\overline{\Omega})\mid u=0$ 于 $\partial\Omega\}$ 为$C_0^1(\overline{\Omega})$ 中的有界集, 则存在$\beta=\beta(W)>0$ 使

$$s\varphi(x)+w(x)\ge 0 \quad 和 \quad -s\varphi(x)+w(x)\le 0$$

对$s\ge\beta, w\in W$, $x\in\overline{\Omega}$ 均成立.

证明 由$\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0$ 于$\partial\Omega$ 的事实立即推得. ▮

引理 3 (i) 设g 满足条件(3.12) 且存在$t_+>0$ 使$g(t_+)>0$. 则对$C_0^1(\overline{\Omega})$ 中的任一有界集W, 存在$\beta_+=\beta_+(W)>0$, 使

$$\Phi(s,w)<0 \quad 和 \quad \Phi(-s,w)\ge 0$$

对$s\ge\beta_+$, $w\in W$ 均成立.

(ii) 设g 满足条件(3.12′) 且存在$t_+>0$ 使$g(t_+)<0$, 则对$C_0^1(\overline{\Omega})$ 中的任一有界集W, 存在$\beta_+=\beta_+(W)>0$, 使

$$\Phi(s,w)>0 \quad 和 \quad \Phi(-s,w)\le 0$$

对$s\ge\beta_+, w\in W$ 均成立.

证明 (i) 设$\beta=\beta(W)>0$ 为引理2 中存在的β. 选取$\beta_0>0$, 使$\beta_0\max\varphi-C>t_+$, 其中$C=\sup_{w\in W}\|w\|_{C_0(\overline{\Omega})}$. 令$\beta_+=\beta+\beta_0$, 我们有

$$s\varphi(x)+w(x)\ge\beta_0\varphi(x)\ge 0, \qquad -s\varphi(x)+w(x)\le-\beta_0\varphi(x)\le 0.$$

对$s\ge\beta_+, w\in W$ 及$x\in\overline{\Omega}$ 均成立. 因此

$$\Phi(s,w)=-\int_\Omega g(s\varphi+w)\varphi dx\le 0, \tag{3.13}$$

$$\Phi(-s,w)=-\int_\Omega g(-s\varphi+w)\varphi dx\ge 0 \tag{3.14}$$

对$s \geq \beta_+$ 及$w \in W$ 均成立. 下证(3.13) 中的严格不等式成立. 由于对每个$s \geq \beta_+$ 及每个$w \in W$, 函数$s \max \varphi + w(x)$ 总在$\partial\Omega$ 上取零值. 依β_+ 的取法$s \max \varphi + w(x_0) \geq \beta_0 \max \varphi - c > t_+$, 其中$\varphi(x_0) = \max \varphi$. 因此, 存在$x_+ \in \Omega$, 使$s\varphi(x_+) + w(x_+) = t_+$, 从而$g(s\varphi(x_+) + w(x_+)) = g(t_+) > 0$. 这便表明在(3.13) 中严格小于号成立.

(ii) 同理可证. ∎

现在我们给出3.3.1 中三个定理的证明:

定理3.3.1 的证明　在3.3.1 中我们已经知道, (3.1) 等价于系统(3.7)–(3.8), 而后者又等价于在$S = S_h$ 上求解

$$\Phi(s, w) = t,$$

其中$\Phi : \mathbb{R}^1 \times V^\perp \to \mathbb{R}^1$

$$\Phi(s, w) = -\int_\Omega g(s\varphi + w)\varphi \, dx \tag{3.15}$$

为有界连续泛函. 从此易见, 定理3.3.1 中的$\Lambda = \Phi(S_h)$.

现在假设$h \in V^\perp$ 是一个L^∞ 函数, g 满足(3.12) 且$g \not\equiv 0$. 不妨设存在$t_+ > 0$ 使$g(t_+) > 0$. 记$W = W_h$ 为S 在$V^\perp$ 上的投影, 即

$$W = \{w \in V^\perp \mid (s, w) \in S, \text{ 对某 } s \in \mathbb{R}\}.$$

由椭圆方程正则性理论可知: 当$h \in L^\infty \subset L^p$ $(\forall\, p \geq 1)$ 时, W 的元素$w \in W^{2,p} \cap W_0^{1,2}$ 且满足先验估计

$$\|w\|_{2,p} \leq C_p(\|h\|_{L^p} + \|QG(s\varphi + w)\|_{L^p}) \qquad p \geq 1.$$

(参见 [13]). 因此$\|w\|_{2,p} \leq C_p \cdot C$, $p \geq 1$, 其中C 是一个依赖于$\|h\|_{L^\infty}$, $\sup |g(u)|$, $\operatorname{meas} \Omega$ 及φ 的常数. 据Sobolev 嵌入引理, 知

$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1+\mu}(\overline{\Omega})$, $p > N$, $\mu = 1 - \frac{N}{p}$. 这便蕴含了W 为$C_0^1(\overline{\Omega})$中的一个有界集. (注意: 因$W \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, 故在$\partial\Omega$ 上有$w = 0$), 现在, 由引理2 及引理3 我们知道: 存在$\beta_+ = \beta_+(w) > 0$, 使

$$\Phi(s,w) < 0 \qquad (s,w) \in S, \qquad s \geq \beta_+$$

及

$$\Phi(s,w) \geq 0, \qquad (s,w) \in S, \qquad S \leq -\beta_+.$$

据定理 1.6.3, $S \subset I\!R \times \overline{B}_\rho(0)$ 中包含一支连接$\{-\beta_+\} \times \overline{B}_\rho(0)$ 与$\{\beta_+\} \times \overline{B}_\rho(0)$ 的连通分支, 这便蕴含了Λ_h 中包含一个区间$[-\delta, 0]$ ($\delta > 0$ 为正常数). ∎

定理 3.3.2 的证明 利用与前面相同的记号. 此外, 记$C_{\alpha,\beta}$ 为S 中的连接$\{\alpha\} \times \overline{B}_\rho(0)$ 与$\{\beta\} \times \overline{B}_\rho(0)$ 的连通分支. 再令$S_\gamma = S \cap (\{\gamma\} \times \overline{B}_\rho(0))$, $\gamma \in I\!R^1$. 现在, 取$\beta_+ = \beta_+(W) > 0$ 意义如前. 我们考察$a = \min \Phi(C_{-\beta_+,\beta_+})$ 和$b = \max \Phi(C_{-\beta_+,\beta_+})$. 显见$a < 0 \leq b$. 由于现在假定了$g(\pm\infty) = 0$. 故据引理 1, $\lim_{|s|\to\infty} \Phi(s,w) = 0$ 对$w \in W$ 一致成立. 现选取$\gamma \in I\!R$, $\gamma > \beta_+$, 使: $a < \Phi(\gamma, w) < 0$ 对$\forall w \in W$ 成立. 令$m_r = \min \Phi(S_r)$, $M_\gamma = \max \Phi(S_\gamma)$, 则有$a < m_\gamma \leq M_\gamma < 0 \leq b$. 我们进一步选取$\delta > \gamma$, 使$M_\gamma < \Phi(\delta, w) < 0$ 对$\forall w \in W$ 成立. 因此

$$a < m_\gamma \leq M_\gamma < m_\delta \leq M_\delta < 0 \leq b, \tag{3.16}$$

其中$m_\delta = \min \Phi(S_\delta)$, $M_\gamma = \max \Phi(S_\delta)$. 最后, 考察连通分支$C_{\gamma,\delta}$ (连接S_γ 与S_δ 的连通分支). 令$a^* = \min \Phi(C_{\gamma,\delta})$, 而$b^* = \max \Phi(C_{\gamma,\delta})$. 我们得到

$$a < a^* \leq \max \Phi(C_{\gamma,\delta} \cap S_\gamma) \leq M_\gamma,$$
$$m_\delta \leq \min \Phi(C_{\gamma,\delta} \cap S_\delta) \leq b^* < 0 \leq b.$$

因此，由(3.16), $M_r < M_\delta$, 故

$$a < a^* < b^* < 0 \leq b.$$

记$\Lambda_h^* = [a^*, b^*] = \Phi(C_{\gamma,\delta})$, 我们有$\Lambda_h^* \subset [a,b] = \Phi(C_{-\beta_+,\beta_+})$. 据$C_{\gamma,\delta}$与$C_{-\beta_+,\beta_+}$，的构造方法知，$C_{\gamma,\delta} \cap C_{-\beta_+,\beta_+} = \emptyset$. 此即对$\forall t \in \Lambda_h^*$, (3.1) 至少有两个解. (一个在$C_{-\beta_+,\beta_+}$ 上而另一个在$C_{\gamma,\delta}$).

下面证$\Lambda_h = \Phi(S_h)$ 是闭的. 设$t = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_n, w_n)$, 其中$(s_n, w_n) \in S_h$. 由于我们已经知道$0 \in \Lambda_h$, 故假设$t \neq 0$. 由先验估计$\|w\|_{2,p} \leq C_p \cdot C, p \geq 1, w \in W$ (参见定理3.3.1 的证明) 推知：存在$\{w_{n_j}\} \subset \{w_n\}$, 使

$$w_{n_j} \to w \quad 在 \quad L^2(\Omega) 上, \tag{3.17}$$

且$w_{n_j} \to w$ a.e. 于Ω. 另一方面$\{s_n\}$ 必为有界数列. (这是因为，若$\{s_n\}$ 无界，则由引理1 不难推知$t = 0$). 因此，我们可以假设$s_{n_j} \to s$, 并结合(3.17) 知

$$(s_{n_j}, w_{n_j}) \to (s, w) \quad 在 \quad I\!R \times V^\perp 上.$$

由S_h 的闭性及Φ 的连续性，可得$(s, w) \in S_h$ 并且$t = \Phi(s, w)$. ∎

定理 3.3.3 的证明　从定理 3.3.2 知 Λ_h 是闭的. 因此 $a_h = \inf \Phi(S_h)$ 和$b_h = \sup \Phi(S_h)$ 均属于Λ_h. 进一步，在假定g 满足(3.12) 及存在$t_+ > 0$, 使$g(t_+) > 0$ 时，有$a_h < 0 \leq b_h$. 设$(\underline{s}, \underline{w}) \in S_h$ 使$\Phi(\underline{s}, \underline{w}) = a_h$. 对一个任意固定的$t \in (a_h, 0)$, 由定理3.3.2 的证明过程我们知道：当$s$ 充分大时，有$t < \Phi(s, w) < 0$ 对$\forall w \in W$ 成立. 因此可选取充分大的$\overline{s}$ 及点$(\overline{s}, \overline{w}) \in S_h$, 使

$$t < \Phi(\overline{s}, \overline{w}) < 0$$

并且

$$(\overline{s} - \underline{s})\varphi + (\overline{w} - \underline{w}) \geq 0. \tag{3.18}$$

(参见引理2). 于是$\underline{u} = \underline{s}\varphi + \underline{w}$ 和$\overline{u} = \overline{s}\varphi + \overline{w}$ 分别为方程

$$Lu - G(u) = t\varphi + h \tag{3.1$_t$}$$

的下解和上解. 由(3.18) 知: $\underline{u} \le \overline{u}$. 由对$h$ 和g 的正则性假设条件知, $\underline{v}, \overline{u} \in C^{2+\mu}(\overline{\Omega})$. 由著名的上、下解方法, 方程$(3.1)_t$ 有解$u : \underline{u} \le u \le \overline{u}$. 即$t \in \Lambda_h$. 至此, 我们已证得$[a_h, 0] \subset \Lambda_h$.

若$b_h = 0$, 则定理不证自明. 不然, 同理可证$[0, b_h] \subset \Lambda_h$. ∎

§ 3.4 两点边值问题 • 渐近一致条件 • 延拓定理

本节利用延拓定理讨论半线性二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + u + g(x,u) = h(x) \qquad x \in (0,\pi) \\ &u(0) = u(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

的解的存在性. 其中$g : [0,\pi] \times I\!R \to I\!R$ 可以为无界函数, 但满足渐近一致性增长条件

$$\lim \sup_{|u| \to \infty} \frac{g(x,u)}{u} = \beta < 3 \tag{4.2}$$

对a.e. $x \in [0,\pi]$ 一致成立. 结果主要有两个方面: 在3.4.1 中, 介绍Landesman-lazer 型条件下的存在性定理; 在3.4.2 中, 介绍符号条件下的存在性定理.

3.4.1 Landesman-Lazer 条件下的结果

考虑两点边值问题

$$\begin{aligned} &u'' + u + g(u) = h(x), \qquad x \in [0,\pi] \\ &u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中$h \in L^2(0,\pi)$，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续.

定理 3.4.1[80] 假设存在实数$\gamma: 0<\gamma<3$ 及实数$r: r>0$，使

$$\frac{g(\xi)}{\xi} \le \gamma, \qquad |\xi| \ge r. \tag{4.4}$$

假设$\underline{g(+\infty)} \triangleq \limsup_{\xi \to +\infty} g(\xi)$ 及$\overline{g(-\infty)} \triangleq \limsup_{\xi \to -\infty} g(\xi)$ 均为有限数. 如果$h \in L^2(0,\pi)$ 满足

$$\overline{g(-\infty)} \int_0^\pi \sin x dx < \int_0^\pi h(x) \sin x\, dx < \underline{g(+\infty)} \int_0^\pi \sin x\, dx, \tag{4.5}$$

则(4.3) 至少有一个解.

(注：这里(4.3) 的解是一个a.e. 满足(4.3) 及边值条件且其导数在$[0,\pi]$ 上绝对连续的函数.)

证明 利用Leray–Schauder 同伦延拓方法. 对于$s \in [0,1]$，我们考察边值问题

$$\begin{aligned} & u'' + (1+\gamma)u + s(g(u) - \gamma u) = h(x), \\ & u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

对$v \in C[0,\pi]$，记$|v|_\infty = \max_{t\in[0,\pi]} |v(t)|$. 我们将证明：存在一个不依赖于$s: s \in [0,1]$ 的常数$R>0$，使(4.6) 的任一可能解u 均满足

$$|u|_\infty \le R. \tag{4.7}$$

为证先验界的存在性，我们先给出g 的一个分解. 作光滑函数$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使当$|\xi| \le r$ 时，$\psi(\xi)=0$；当$r<|\xi|<2r$ 时，$0 \le \psi(\xi) \le 1$；当$|\xi| \ge 2r$ 时，$\psi(\xi)=1$. 并记

$$g_1(\xi) = \psi(\xi) \cdot g(\xi), \qquad g_2(\xi) = (1-\psi(\xi))g(\xi),$$

则$g_2(\xi)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界. 且由条件(4.4) 和(4.5) 不难推知：存在实数m, 使

$$m \le \frac{g_1(\xi)}{\xi} \le \gamma \tag{4.8}$$

对$\forall\xi:\xi \ne 0$ 成立. 现规定$\frac{g_1(0)}{0}=0$, 则(4.8) 在$(-\infty,+\infty)$ 上成立.

反设先验界不存在，则存在$[0,1]$中的点列$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及方程(4.6) 当$s=s_n$ 时的解$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，使$|u_n|_\infty \ge n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. 若记$v_n=\frac{u_n}{|u_n|_\infty}$, 则

$$\begin{aligned} &v''_n+v_n+p_n(x)v_n=h_n(x),\\ &v_n(0)=v_n(\pi)=0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中

$$p_n(x)=(1-s_n)\gamma+s_n g_1(u_n(x))/u_n(x), \tag{4.10}$$

$$h_n(x)=[h(x)-s_n g_2(u_n(x))]/|u_n|_\infty, \tag{4.11}$$

从(4.8) 可知：存在数m_1, 使

$$m_1 \le p_n(x) \le \gamma \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

进一步，由于g_2 有界，故$\lim_{n\to\infty} h_n=0$ 于$L^2(0,\pi)$. 由$|u_n|_\infty=1$ 可推知$\{v''_n\}$ 的$L^2(0,\pi)$ 范数有一个不依赖于n 的界. 据Rolle 定理，v'_n 在$(0,\pi)$ 中必有零点τ_n. 则因

$$\begin{aligned} |v'_n(x)| \le &\left|\int_{\tau_n}^{x} v''_n(t)\,dt\right| \le \int_0^\pi |v''_n(t)|\,dt\\ \le &\sqrt{\pi}\left\{\int_0^\pi |v''_n(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

故$\{v'_n(x)\}$ 在$C[0,\pi]$ 中有一个不依赖于n 的界. 不难验证$\{v'_n(x)\}$ 在$[0,\pi]$ 上是等度连续的，故由Ascoli 引理，$\{v'_n(x)\}$ 中有在$C[0,\pi]$

中收敛的子列，我们不妨仍记成$\{v'_n(x)\}$，即$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = w(x)$（一致收敛）于$[0,\pi]$，同时$\lim_{n\to\infty} v'_n(x) = w'(x)$（一致收敛）于$[0,\pi]$. 其中$w \in C^1[0,\pi], |w|_\infty = 1$，且$w(0) = w(\pi) = 0$. 由(4.12)式知，$\{p_n\}_1^\infty$ 在$L^2(0,\pi)$中有界，因此可以假设p_n 在$L^2(0,\pi)$中弱收敛于p. 显然$m_1 \le p(x) \le \gamma$ a.e. 于$[0,\pi]$. 从(4.9)可知：对$x \in [0,\pi]$，

$$v'_n(x) = v'_n(0) - \int_0^x (1+p_n(t))v_n(t)dt - \int_0^x h_n(t)\,dt, \qquad (4.13)$$

令$n \to \infty$，得

$$w'(x) = w'(0) - \int_0^x (1+p(x))w(x)\,dx.$$

因此，w' 是绝对连续的并且

$$\begin{aligned} &w''(x) + (1+p(x))w(x) = 0 \qquad \text{a.e.} \\ &w(0) = w(\pi) = 0. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

我们断言：对$\forall x \in (0,\pi)$，$w(x) \neq 0$. 事实上，因$w(x) \not\equiv 0$ 又$1+p(x) \le 1+\gamma < 4$ a.e.，再利用Strum 比较定理及$\sin 2t$ 在$(0,\pi)$内仅有一个零点的事实便可推得. 从这可知，$w(x)$ 在$(0,\pi)$上不变号. 不妨设$w(x) > 0$ 于$(0,\pi)$. 对于$w(x) < 0$ 的情形，可同样讨论.

因w 是(4.14)的一个非平凡解，故有$w'(0) > 0$ 而$w'(\pi) < 0$. 因

$$w_n(x) = \frac{u_n(x)}{|u_n|_\infty} \to w(x)$$

在$C^1[0,\pi]$中成立，故当n 充分大时，$v_n(x) > 0$ 于$(0,\pi)$（事实上，反设对$\forall n, \exists t_n$，使$v_n(t_n) < 0$. 由聚点定理，$\{t_n\}$ 必有收敛子列，不妨仍记为$\{t_n\}: t_n \to C \in [0,\pi]$. 若$C \neq 0$ 或π，则$v_n(t_n) \to w(C) > 0$，矛盾！若$C = 0$ 或π，则存在$\xi_n \in (0,t_n)$，使$v'_n(\xi_n) = 0$

而$\xi_n \to C = 0$ 或π. 这便推出$w'(0) = 0$ 或$w'(\pi) = 0$. 这又与解对初值问题的唯一性矛盾！). 从而推知，对充分大的n, 有$u_n(x) > 0$于$(0, \pi)$. 结合(4.5) 推知，函数列

$$z_n(x) \triangleq (1 - s_n))\gamma u_n(x) + s_n g(u_n(x))$$

在$[0, \pi]$ 上有一个不依赖于n 的下界. 由于当$n \to \infty$ 时，$|u_n|_\infty \to \infty$, 故$u_n(x) \to \infty$ 在$(0, \pi)$ 的任一紧子区间上一致成立. 从而由(4.5) 我们有

$$\int_0^\pi h(x) \sin x \, dx < \int_0^\pi (\liminf_{n \to \infty} z_n(x)) \sin x \, dx. \tag{4.15}$$

但另一方面，给$u = u_n, s = s_n$ 的(4.6) 的两边同乘以$\sin x$ 然后分部积分得

$$\int_0^\pi z_n(x) \sin x dx = \int_0^\pi h(x) \sin x \, dx.$$

因$z_n(x)$ 在$[0, \pi]$ 上有一个不依赖于n 的下界，故由Fatou 定理

$$\int_0^\pi (\liminf_{n \to \infty} z_n(x)) \sin x dx \leq \lim_{n \to \infty} \int_0^\pi z_n(x) \sin x dx = \int_0^\pi h(x) \sin x \, dx,$$

这便与(4.15) 矛盾！故(4.7) 成立.

至此，后边的证明是标准的. 因问题:

$$Lu = 0, \qquad u(0) = u(\pi) = 0$$

(其中$Lu \triangleq u'' + u + \gamma u$) 仅有零解，故对$\forall f \in C[0, \pi]$, 问题

$$Lu = f, \qquad u(0) = u(\pi) = 0$$

有唯一解$L^{-1}f$. 不难看出$L^{-1} : C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ 为紧映象. 设$G : C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ 为g 的Nemytskii 映象. 记u_0 为满足

$$Lu_0 = h, \qquad u_0(0) = u_0(\pi) = 0$$

的唯一解. 定义映象$N : C[0,\pi] \times [0,1] \to C[0,\pi]$

$$N(u,s) = u_0 + L^{-1}[s(\gamma u - G(u))],$$

则N 是一个紧同伦. 若对某$s \in [0,1], u = N(u,s)$, 则u 是(4.6) 的一个解. 现记$D = \{u \in C[0,\pi] \mid |u|_\infty < R\}$. 因$u - N(u,s) \neq 0$ 对$\forall (u,s) \in \partial D \times [0,1]$ 成立, 故对$\forall s \in [0,1], \deg(Id - N(\cdot,s), D, 0)$ 是一个常数. 因$N(u,0) = u_0$, 由(4.6), $|u_0|_\infty < R$. 故有

$$1 = \deg(Id - N(\cdot,0), D, 0) = \deg(Id - N(\cdot,1), D, 0),$$

从而$u = N(u,1)$ 有解. 即(4.3) 至少有一个解. ∎

3.4.2 符号条件下的结果

设$g : [0,\pi] \times I\!R \to I\!R$ 满足Caratheodory 条件及符号条件

$$ug(x,u) \leq 0 \qquad \forall u \in I\!R \tag{4.16}$$

或

$$ug(x,u) \geq 0 \qquad \forall u \in I\!R, \tag{4.17}$$

(注意: 满足上述符号条件的g, 可能不满足Landesman-Lazer 型条件(4.5)). 再设$h \in L^1(0,\pi) : \int_0^\pi h \sin x dx = 0$. 继续考察两点边值问题

$$\begin{aligned} u'' + u + g(x,u) &= h \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

的可解性.

现记$X = C_0[0,\pi] = \{u \in C[0,\pi] \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$, $Y = L'[0,\pi]$, 并赋以它们通常的范数. 记$H = L^2(0,\pi)$. 设

$$Y_2 = \{u \in Y \mid u(x) = \alpha \sin x \text{ a.e. } [0,\pi], \alpha \in I\!R\}, \tag{4.19}$$

Y_1 为Y 的直交补，使$Y = Y_1 \oplus Y_2$. 于是$\forall u \in Y$ 可分解为

$$
\begin{aligned}
u(x) = & u(x) - \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin t\, dt\right)\sin x \\
& + \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin t\, dt\right)\sin x \qquad x \in [0,\pi].
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

定义$P: Y \to Y_1, Q: Y \to Y_2$ 分别为到Y_1 和Y_2 上的直交投影. 则$\forall u \in Y$

$$
\begin{aligned}
Pu &= u(x) - \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin t dt\right)\sin x, \\
Qu &= \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin t dt\right)\sin x.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

易见$Q = Id - P$, 且P 和Q 均连续. 令$X_2 = X \cap Y_2$, 则X_2 为X 的闭子集. 记X_1 为X 中与X_2 直交的闭子空间，则$P(X) \subset X_1, Q(X) \subset X_2$ 且投影$P|_X: X \to X_1$, $Q|_X: X \to X_2$ 均连续. 同理，我们得到$H = H_1 \oplus H_2$ 且投影$P|_H: H \to H_1, Q|_H: H \to H_2$ 均连续. 在本节后面的讨论中，在不致混淆的情况下，我们常将$P|_X$, $P|_H$ 和$P|_Y$ 简写成P; 将$Q|_X$ $Q|_H$ 和$Q|_Y$ 简写成Q. 其含义应按出现处的具体内容定.

对于$u \in X, y \in Y$. 记$(u,v) = \int_0^\pi uv\, dx$. 即(,) 为$X$ 与Y 间的偶对. 则

$$
(u,v) = (Pu, Pv) + (Qu, Qv). \tag{4.22}
$$

定义线性算子$L: D(L) \subset X \to Y$

$$
Lu = u'' + u, \tag{4.23}
$$

其中

$$
D(L) = \{u \in X \mid u' \in AC[0, \pi] \ \ u(0) = u(\pi) = 0\}. \tag{4.24}
$$

现在对任意满足$\int_0^\pi h(x)\sin x dx = 0$ 的$h \in L^1(0,\pi)$, 问题

$$u'' + u = h \qquad u(0) = u(\pi) = 0$$

在X_1 中有唯一解, 记为Kh. 于是得映象$K : Y_1 \to X_1$, K 线性有界且满足

$$KP(u) \in D(L), \quad \forall u \in Y \tag{4.25}$$

$$LKP(u) = P(u), \tag{4.26}$$

且对$\forall u \in H_1$, 有

$$(Ku, u) \geq -\frac{1}{3}\|u\|_H^2. \tag{4.27}$$

再定义非线性映象$N : X \to Y$

$$(Nu)(x) = g(x, u(x)), \qquad x \in [0, \pi]. \tag{4.28}$$

于是(4.18) 可改写成算子方程

$$Lu + Nu = h, \qquad u \in D(L) \cap X. \tag{4.29}$$

为了给出本节后边的定理, 先给出$g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对L^p 的Caratheodory 条件的定义

定义 设函数$g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

(i) 对a.e. $x \in [0,\pi], g(x,\cdot)$ 在$\mathbb{R}$ 上连续;

(ii) 对$\forall u \in \mathbb{R}, g(\cdot, u)$ 在$[0,\pi]$ 上可测;

(iii) $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\exists \alpha_r \in L^p(0,\pi)$, ($p \geq 1$ 为常数)

使当$|u| \geq r$ 时, 有$|g(x,u)| \leq \alpha_r(x)$.

则称g 满足对L^p 的Caratheodory 条件.

定理 3.4.2[82] 设$g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对L^2 的Carathéodory 条件, 且

(i) $ug(x,u) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$, a.e. $x \in [0,\pi]$.

(ii) 存在常数$\beta \geq 0$, 使

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{g(x,u)}{u} = \beta < 3 \qquad \text{对 } x \in [0,\pi] \text{ 一致成立.}$$

则对任意$h \in Y_1 = \{w \in L^1(0,\pi) \mid \int_0^\pi w \sin x \, dx = 0\}$, 边值问题

$$\begin{aligned} u'' + u + g(x,u) &= h \qquad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

至少有一个解$u \in X = C[0,\pi]$.

证明 如前所述, 问题(4.30) 可以改写成X 中的算子方程

$$Lu + Nu = h, \tag{4.31}$$

求解(2.31), 仅需求解方程组

$$\begin{aligned} &Pu + KPNu = h_1 \\ &QNu = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

就够了, 其中$h_1 = Kh$. 显然(4.32) 又等价于单个方程

$$Pu + QNu + KPNu = h_1. \tag{4.33}$$

由Leray-Schauder 延拓定理, 要证(4.33) 有解, 只要证得方程族:

$$Pu + (1-\lambda)Qu + \lambda QNu + \lambda KPNu = \lambda h_1, \quad \lambda \in (0,1) \tag{4.34}$$

的所有可能解有一个不依赖于λ 的先验界. 不难看出, (4.34) 又可改写成方程

$$\begin{aligned} &Pu + \lambda KPNu = \lambda h_1 \\ &(1-\lambda)Qu + \lambda QNu = 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

如果$u_\lambda \in X$ 是(4.35) 对某$\lambda \in (0,1)$ 的一个解，则$u_\lambda \in D(L)$ 且有

$$
\begin{aligned}
&(Pu_\lambda, PNu_\lambda) + \lambda(KPNu_\lambda, PNu_\lambda) = \lambda(h_1, PNu_\lambda),\\
&(1-\lambda)(Qu_\lambda, QNu_\lambda) + \lambda(QNu_\lambda, QNu_\lambda) = 0.
\end{aligned}
$$

利用(4.27) 式，推得

$$
(Pu_\lambda, PNu_\lambda) - \frac{1}{3}\|PNu_\lambda\|^2 \leq \lambda(h_1, PNu_\lambda), \tag{4.36}
$$

$$
(Qu_\lambda, QNu_\lambda) \leq 0. \tag{4.37}
$$

由于$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{g(x,u)}{u} = \beta < 3$ 对$x \in [0,\pi]$ 一致成立. 因此可选到定数$\varepsilon : 0 < \beta + \varepsilon < 3$ 及常数$C(\varepsilon) > 0$, 使对$\forall u \in H$, 有

$$
(Nu, u) \geq \frac{1}{\beta+\varepsilon}\|Nu\|_H^2 - C(\varepsilon). \tag{4.38}
$$

再从(4.36), (4.37) 及(4.38) 知:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta+\varepsilon}\|Nu_\lambda\|_H^2 - C(\varepsilon)\\
\leq&(Nu_\lambda, u_\lambda) \leq \frac{1}{3}\|PNu_\lambda\|_H^2 + \|h_1\|_X \cdot \|PNu_\lambda\|_Y\\
\leq&\frac{1}{3}\|Nu_\lambda\|_H^2 + C_0\|h_1\|_X \cdot \|Nu_\lambda\|_Y\\
&(C_0 = \|P\|_{Y\to Y}).
\end{aligned}
$$

从而推得

$$
\left(\frac{1}{\beta+\varepsilon} - \frac{1}{3}\right)\|Nu_\lambda\|_H^2 \leq \sqrt{\pi}C_0\|h_1\|_X\|Nu_\lambda\|_H + C(\varepsilon).
$$

上式表明，存在一个不依赖于$\lambda \in (0,1)$ 的常数$C > 0$, 使

$$
\|Nu_\lambda\|_H \leq C. \tag{4.39}
$$

由(4.35) 的第一个方程，推得

$$\begin{aligned}\|Pu_\lambda\|_X \le &\|KPNu_\lambda\|_X + \|h_1\|_X \\ \le &\|K\| \cdot \|PNu_\lambda\|_Y + \|h_1\|_X \\ \le &\sqrt{\pi} C_0 \|K\| \cdot \|Nu_\lambda\|_H + \|h_1\|_X \\ \le &\sqrt{\pi} C_0 \|K\| \cdot C + \|h_1\|_X \triangleq C_1.\end{aligned}$$

下边只需证明；存在一个不依赖于$\lambda \in (0,1)$ 的常数$C_2 > 0$, 使$\|Qu_\lambda\| \le C_2$.

反设不然，则集合

$$\{\|Qu_\lambda\|_X \mid \lambda \in (0,1)\} \quad \text{无界.} \tag{4.40}$$

现在从(4.35) 的第一个方程，可知

$$LPu_\lambda + \lambda LKPNu_\lambda = \lambda Lh_1,$$

即

$$LPu_\lambda + \lambda PNu_\lambda = \lambda h.$$

从而，

$$\begin{aligned}\|LPu_\lambda\|_Y \le &\lambda \|PNu_\lambda\|_Y + \lambda \|h\|_Y \\ \le &\|PNu_\lambda\|_Y + \|h\|_Y \\ \le &C_0 \|Nu_\lambda\|_Y + \|h\|_Y \le C_3\end{aligned}$$

对$\lambda \in (0,1)$ 一致成立，其中$C_3 \triangleq C_0 C + \|h\|_Y$.

现在因为

$$LPu_\lambda = (Pu_\lambda)'' + Pu_\lambda,$$

$\|Pu_\lambda\|_X \le C_1$, 又$u_\lambda(0) = u_\lambda(\pi) = 0$, 由Rolle 定理不难推出，$\|(Pu_\lambda)''\|_y$ 有一个不依赖于$\lambda \in (0,1)$ 的界，进而存在常数$C_4 > 0$ (C_4 不依赖于λ) 使

$$\|(Pu_\lambda)'\|_X \le C_4.$$

利用著名的不等式：对$\forall v \in \{w \in C^1[0,\pi] \mid w(0) = w(\pi) = 0\}$，有

$$\left|\frac{v(x)}{\sin x}\right| \leq \frac{\pi}{2} \max_{S\in[0,\pi]} |v'(s)|.$$

我们得到

$$|Pu_\lambda(x)| \leq \frac{\pi}{2} C_4 \sin x \qquad \forall x \in [0,\pi], \quad \lambda \in (0,1). \tag{4.41}$$

现在由(4.40) 可知：存在序列$\{\lambda_n\} \subset (0,1)$，使当$n \to \infty$ 时，

$$\|Qu_{\lambda_n}\| = \left|\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_{\lambda_n}(t) \sin t\, dt\right| \to \infty.$$

我们不妨假定，当$n \to \infty$ 时，

$$\int_0^\pi u_{\lambda_n}(t) \sin t\, dt \longrightarrow \infty, \tag{4.42}$$

故存在n_0，使当$n > n_0$ 时，有

$$\int_0^\pi u_{\lambda_n}(t) \sin t\, dt \geq \frac{\pi^2}{4} C_4. \tag{4.43}$$

于是，当$n \geq n_0$ 时，利用(4.41) 和(4.43) 知

$$\begin{aligned} u_{\lambda_n}(x) =& Qu_{\lambda_n}(x) + Pu_{\lambda_n}(x) \\ =& \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u_{\lambda_n}(t) \sin t\, dt\right) \sin x + Pu_{\lambda_n}(x) \\ \geq& \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} C_4 \sin x - \frac{\pi}{2} C_4 \sin x \geq 0. \end{aligned}$$

由于$vg(x,v) \geq 0$ 对$x \in [0,\pi], v \in \mathbb{R}$ 成立. 故$g(x, u_{\lambda_n}(x)) \geq 0$ 对$n \geq n_0, x \in [0,\pi]$ 成立，并且

$$(QNu_{\lambda_n}, Qu_{\lambda_n}) \geq 0 \qquad (n \geq n_0 \text{ 时}).$$

从(4.35) 的第二式推知，当$n \geq n_0$ 时，有

$$(1-\lambda_n)(Qu_{\lambda_n}, Qu_{\lambda_n}) = (1-\lambda_n)\frac{2}{\pi}(\int_0^\pi u_{\lambda_n}(t)\sin t dt)^2 \leq 0,$$

导出矛盾. 同理，当$\int_0^\pi u_{\lambda_n}(t)\sin t dt \to -\infty$ 时也可推出矛盾.

于是$\{\|Qu_\lambda\|_X \mid \lambda \in (0,1)\}$ 是有界集. ∎

注 1 在§3.3 中，由于假定非线性项g 一致有界，故对符号条件$ug(u) \leq 0, \forall u \in \mathbb{R}$ 成立的命题，对符号条件$ug(u) \geq 0, \forall u$, 亦然成立. 但当非线性项g 无界时，符号条件$ug(x,u) \leq 0, \forall u \in \mathbb{R}$, 与符号条件$ug(x,u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, 有着本质上的区别. 事实上，定理4.4.2 是在$ug(x,u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$ 及增长性条件：

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{g(x,u)}{u} = \beta < 3 \tag{4.44}$$

下建立的. 若(4.44) 被去掉，则问题(4.30) 可能无解. 例如，取$g(x,u) = 3u$, $h = \sin 2x$. 则

$$\begin{aligned} u'' + u + 3u &= \sin 2x \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

无解. ((4.45) 两边同乘$\sin 2x$, 后分部积分便出现矛盾！) 但是，从下面的定理(定理4.4.3) 可以看出：当在符号条件$ug(x,u) \leq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$ 下讨论时，我们不需要增长性条件(4.44), 而问题(4.30) 总是有解的.

由于在符号条件$ug(x,u) \leq 0$ 下讨论问题(4.30) 相当于在符号条件$ug(x,u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$ 下讨论问题

$$\begin{aligned} -u'' - u + g(x,u) &= h(x), \\ u(0) = u(\pi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.46}$$

故我们在$ug(x,u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$ 下对(4.46) 建立存在性定理.

定理 3.4.3[82] 设 $g:[0,\pi]\times \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ 满足对 $L^1(0,\pi)$ 的 Carathéodory 条件及

$$ug(x,u)\ge 0\quad \forall x\in[0,\pi],\qquad \forall u\in \mathbb{R},$$

则对任意$h\in Y_1=\{w\in L^1(0,\pi)\mid \int_0^\pi w\sin t\,dt=0\}$, 两点边值问题 (4.46) 至少有一个解$u\in X=C[0,\pi]$.

证明 取X,Y,X_1,X_2,Y_1,Y_2 同前. 设$\widetilde{L}=-L,\widetilde{K}=-K$, 其中 $L:D(L)\subset X\to Y$ 由(4,23)-(4.24) 给出，而K 满足(4.25)-(4.26), 则对$\forall u\in Y$, 有

$$\widetilde{K}P(u)\in D(L),\tag{4.47}$$

$$\widetilde{L}\widetilde{K}P(u)=P(u)\quad 及\quad (\widetilde{K}Pu,Pu)\ge 0.\tag{4.48}$$

进一步，利用Fourier 级数及Parseval 不等式可推出：对$\forall u\in H_1=\{w\in L^2(0,\pi)\mid \int_0^\pi w\sin t\,dt=0\}$, 有

$$(\widetilde{K}u,u)\le \frac{1}{3}\|u\|_H^2,\tag{4.49}$$

且等号成立当且仅当$u=\alpha\sin 2x,\alpha\in \mathbb{R}$.

如同本小节开始的讨论，问题(4.46) 可以改写成

$$\widetilde{L}u+Nu=h.\tag{4.50}$$

现在求解(4.50) 又等价于求解系统

$$Pu+\widetilde{K}PNu=h_1,\tag{4.51}$$

$$QNu=0,\tag{4.52}$$

其中$u\in D(L)\cap X$, 而$h_1=\widetilde{K}h$. 由于$h\in Y_1$, 故$Ph=h,Qh=0$. 不难看出，(4.51)-(4.52) 又等价于单个方程

$$Pu+QNu+\widetilde{K}PNu=h_1,\tag{4,53}$$

它具有0指标的Fredholm算子紧扰动的形式. 由Leray-Schander延拓定理的一个经稍微变形的结果，证(4.53)存在解，只要证得同伦方程

$$Pu+(1-\lambda)Qu+\lambda QNu+\lambda\widetilde{K}PNu=\lambda h_1 \tag{4.54}$$

$\lambda\in(0,1)$, 的所有可能解有一个不依赖于$\lambda\in(0,1)$的先验界.

由于(4.54)等价于系统

$$Pu+\lambda\widetilde{K}PNu=\lambda h_1, \tag{4.55}$$

$$(1-\lambda)Qu+\lambda QNu=0. \tag{4.56}$$

如果u_λ是(4.5)-(4.56)对$\lambda\in(0,1)$的解，则$u_\lambda\in D(\widetilde{L})$且

$$(Pu_\lambda,PNu_\lambda)+\lambda(\widetilde{K}PNu_\lambda,PNu_\lambda)=\lambda(h_1,PNu_\lambda)$$
$$(1-\lambda)(Qu_\lambda,QNu_\lambda)+\lambda(QNu_\lambda,QNu_\lambda)=0.$$

利用(4.48)推知

$$(Pu_\lambda,PNu_\lambda)\le\lambda(h_1,PNu_\lambda), \tag{4.57}$$

$$(Qu_\lambda,QNu_\lambda)\le 0. \tag{4.58}$$

其次，从对g的题设可知：$\forall k\in\mathbb{R}:k\ge 0$均存在常数$C(k)\ge 0$，使

$$(Nu,u)\ge k\|Nu\|_Y-C(k),\qquad u\in Y \tag{4.59}$$

利用(4.57), (4.58)及(4.59)可知. 对$\forall k\in\mathbb{R}$, $k\ge 0$, $\exists C(k)\ge 0$，使

$$\begin{aligned}k\|Nu_\lambda\|_Y-C(k)\le&(Nu_\lambda,u_\lambda)\le\lambda(h_1,PNu_\lambda)\\ &\le\|h_1\|_X\|PNu_\lambda\|_Y\le C_6\|h_1\|_X\|Nu_\lambda\|_Y,\end{aligned}$$

其中$C_6 \ge 0$, 使$\|Pu\|_Y \le C_6\|u\|_Y$. 于是

$$(k - C_6\|h_1\|_X)\|Nu_\lambda\|_Y \le C(k). \tag{4.60}$$

从(4.55) 可知

$$\begin{aligned}\|Pu_\lambda\|_X &\le \|\widetilde{K}PNu_\lambda\|_X + \|h_1\|_X \\ &\le \|\widetilde{K}\|\|PNu_\lambda\|_Y + \|h_1\|_X \\ &\le C_0\|\widetilde{K}\| \cdot \|Nu_\lambda\|_Y + \|h_1\|_X.\end{aligned} \tag{4.61}$$

现取$k > C_0\|h_1\|_X$. 从(4.60) 及(4.61) 知：存在常数$C_7 > 0$, C_7 不依赖于$\lambda \in (0,1)$, 使

$$\|Nu_\lambda\|_Y \le C_7, \qquad \|Pu_\lambda\|_X \le C_7, \qquad \lambda \in (0,1). \tag{4.62}$$

最后，关于集合$\{\|Qu_\lambda\|_X \mid \lambda \in (0,1)\}$ 的有界性，可仿定理 4.4.2 的证明给出. ∎

注 2 Gupta[83] 考察弹性梁方程

$$\begin{aligned}&\frac{d^4u}{dx^4} - \pi^4 u + g(x,u) = e(x) \\ &u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\end{aligned}$$

的可解性及解的存在唯一性. 由于π^4 是线性特征值问题

$$\begin{aligned}&\frac{d^4u}{dx^4} - \lambda u = 0 \\ &u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\end{aligned}$$

的第一个特征值，而$\lambda_1 = \pi^4$ 所对应的特征函数为$\sin \pi x$, $x \in [0,1]$. 故存在性结果与本节结果平行，证法类似.

注 3 [83] 中除存在性结果外，还包括当g 对u 单调时可解的充要条件及若干唯一性结果. 这里将它们搬到二阶常微分方程两点边值问题中来.

定理 3.4.4 设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足对$L^1(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件. 且对$\forall x\in(0,\pi), g(x,\cdot)$ 为不减函数. 则对$\forall h\in Y_1$, 两点边值问题(4.46) 有解的充要条件为存在$\alpha\in I\!R$, 使

$$\int_0^\pi g(x,\, \alpha\sin x)\sin x\, dx = 0. \tag{4.63}$$

定理 3.4.5 设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足对$L^2(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件, 对$\forall x\in(0,\pi)$, $g(x,\cdot)$ 为不减函数及

(i) $g(x,u)u\geq 0 \quad \forall x\in[0,\pi]$ 及$u\in I\!R$

(ii) 存在$\beta\geq 0$, 使

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{g(x,u)}{u}=\beta<3 \qquad \text{对 } x\in[0,\pi] \text{ 一致成立.}$$

则对$\forall h\in Y_1$, (4.30) 有解的充要条件为存在$\alpha\in I\!R$, 使

$$\int_0^\pi g(x,\alpha\sin x)\sin x dx = 0. \tag{4.64}$$

定理 3.4.6 设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足对$L^1(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件及

(i) 对a.e. $x\in(0,\pi), g(x,\cdot)$ 严格增;

(ii) $g(x,0)\equiv 0$, a.e. $x\in[0,\pi]$;

则对$\forall h\in Y_1$, (4.46) 有唯一解.

定理 3.4.7 设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足对$L^2(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件及存在$\beta: 0\leq\beta<3$, 使$(u_1-u_2)(g(x,u_1)-g(x,u_2))\geq \frac{1}{\beta}(g(x,u_1)-g(x,u_2))^2$ 对a.e. $x\in[0,\pi]$ 及$\forall u_1,u_2\in I\!R$ 成立. 进一步, 假设$g(x,0)=0,\forall x\in[0,\pi]$. 则对$\forall h\in Y_1$, (4.30) 有唯一解.

§ 3.5 抽象方程•渐近非一致•延拓定理

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域. 记$H = L^2(\Omega)$. 本节首先讨论抽象算子方程

$$Lu = \lambda_N u + g(\cdot, u) - h$$

的可解性. 其中$h \in H, L : D(L) \subset H \to H$ 是一个有闭值域的稠定自伴线性算子, $\lambda_N \in \sigma(L)$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个至多线性增长且满足Carathéodory 条件的非线性函数. 在本节, 非线性函数g 可以是无界的, 并且允许在一个正测集上接触$\lambda_{N+1} - \lambda_N$ (或$\lambda_N - \lambda_{N-1}$). 接着, 我们将抽象结果用于讨论Duffing 方程周期边值问题、椭圆方程边值问题的可解性, 以及波方程、梁方程的时间周期解的存在性.

3.5.1 记号和引理

设Ω 是一个有界区域, $H = L^2(\Omega)$. H 的内积和范数分别记为$(\cdot, \cdot)$ 和$\|\cdot\|$. 设

$$L : D(L) \subset H \to H$$

是一个具有闭值域$R(L)$ 的稠定自伴线性算子. 则

$$(\ker L)^{\perp} = R(L).$$

上式表明L 有右逆(right inverse)

$$K \triangleq (L|_{D(L)\cap R(L)})^{-1} : R(L) \to R(L),$$

且K 是连续的线性算子. 在本节中, 我们将假定K 为紧算子. 由该假设可以推出L 的谱为纯点谱, 记之为$\sigma(L)$. 进一步, 设每一个

$\lambda \in \sigma(L)\backslash\{0\}$ 为有限重的特征值；$\sigma(L)$ 至多含有可数个点，我们将其排成一列

$$\cdots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots .$$

显然$\lambda_0 \in \sigma(L)$ 的充要条件为L 不可逆. 在$\lambda_0 \in \sigma(L)$ 的情形，λ_0 的重数可以是有限，也可以是无穷. 正特征值和负特征值的个数可以是无穷、有限或零. 最后，记P_j 为H 到$\ker(L - \lambda_j Id)$ 上的直交投影. 则L 可以谱分解为

$$L = \sum_j r_j P_j.$$

设$N \in \mathbb{Z}$ (整数集). $\forall u \in H$, 可分解为

$$u(x) = \overline{u}(x) + u^0(x) + \widetilde{u}(x),$$

其中

$$\overline{u} = \sum_{j<N} P_j u, \qquad u^0 = P_n u, \qquad \widetilde{u} = \sum_{j>N} P_j u.$$

再记$u^{\perp} = u - u^0$, 易见$u^0 \in \ker(L - \lambda_N Id)$.

设$\widehat{H} = \{u \in H \mid u = \sum_{j>N} P_j u\}$, 则$\widetilde{u} \in \widetilde{H}$.

定义 若$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足：存在数$d \geq 0$ 及$e \in H$, 使

$$|g(x,u)| \leq d|u| + e(x) \tag{5.1}$$

对a.e. $x \in \Omega$ 及$\forall u \in \mathbb{R}$ 成立. 则称u 至多线性增长.

在本节中，如果$\ker(L)$ 是无穷维的，则假定$0 < \lambda_N < \lambda_{N+1}$ 或$\lambda_N < \lambda_{N+1} < 0$, 并且对a.e. $x \in \Omega$, $(\mathrm{sign}\lambda_N)\ g(x, \cdot)$ 是不减的.

引理 1 设$p \in L^{\infty}(\Omega)$ 并且满足：对a.e. $x \in \Omega$, 有

$$0 \leq p(x) \leq \lambda_{N+1} - \lambda_N \triangleq r$$

及对$\forall w \in \ker(L-\lambda_{N+1}Id)\backslash\{0\}$, 有

$$\int_\Omega (r-p(x))w^2(x)dx>0, \tag{5.2}$$

则存在$\delta=\delta(p)>0$ 使对$\forall u\in D(L)$, 均有

$$D_p(u)\triangleq(Lu-(\lambda_N+p)u,\ \widetilde{u}-(\overline{u}+u^0))\geq\delta\|u^\perp\|^2.$$

证明 利用$(\overline{u}+u^0)$ 与$\widetilde{u}$ 的直交性及$u^0\in\ker(L-\lambda_N Id)$ 的事实，可知

$$\begin{aligned}D_p(u)=&(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u})-(L\overline{u},\overline{u})-(Lu^0,u^0)\\&+\lambda_N(\overline{u}+u^0,\overline{u}+u^0)+(p(\overline{u}+u^0),\overline{u}+u^0).\end{aligned}$$

由于$P(x)\geq 0$ a.e. 于Ω, 因此上式的最后一项非负，从而

$$D_p(u)\geq(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\ \widetilde{u})+\lambda_N(\overline{u},\overline{u})-(L\overline{u},\ \overline{u}). \tag{5.3}$$

由Parseval 恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_N(\overline{u},\overline{u})-(L\overline{u},\overline{u})&=\lambda_N\sum_{j\leq N-1}|P_ju|^2-\sum_{j\leq N-1}\lambda_j|P_ju|^2\\&=\sum_{j\leq N-1}(\lambda_N-\lambda_j)|P_ju|^2\geq\sum_{j\leq N-1}[\min_j(\lambda_N-\lambda_j)]|P_ju|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\lambda_N(\overline{u},\overline{u})-(L\overline{u},\overline{u})\geq\delta_1\|\overline{u}\|^2, \tag{5.4}$$

其中$\delta_1=\lambda_N-\lambda_{N-1}>0$.

现在我们将证明：存在$\delta_2=\delta_2(p)>0$ 使

$$(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u})\geq\delta_2\|\widetilde{u}\|^2. \tag{5.5}$$

由于$P(x) \le r = \lambda_{N+1} - \lambda_N$, a.e. $x \in \Omega$, 我们有

$$\begin{aligned}(L\widetilde{u},\widetilde{u}) - \big((\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u}\big) \ge& (L\widetilde{u},\widetilde{u}) - \lambda_{N+1}(\widetilde{u},\widetilde{u})\\ =& \sum_{j\ge N+1}(\lambda_j-\lambda_{N+1})|p_j u|^2,\end{aligned}$$

即

$$(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u}) \ge \sum_{j>N+1}(\lambda_j-\lambda_{N+1})|P_j u|^2. \qquad (5.6)$$

因此，$(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u}) \ge 0$ 且等号成立的充要条件为$\widetilde{u} = w$ 而$w \in \ker(L-\lambda_{N+1}Id)$. 从而依假定(5.2) 式可推知$(L\widetilde{u}-(\lambda_N+p)\widetilde{u},\widetilde{u}) = 0$ 当且仅当$\widetilde{u} = 0$. 现在反设(5.5) 不真，即存在一个序列$\{\widetilde{u}_k\} \subset \widetilde{H} \cap D(L), \|\widetilde{u}_k\| = 1$, 使对$\forall k \in N$, 有

$$\big(L\widetilde{u}_k-(\lambda_N+p)\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k\big) \le \frac{1}{k}. \qquad (5.7)$$

将$\widetilde{H}$ 分解为

$$\widetilde{H} = \ker(L-\lambda_{N+1}Id) \oplus \widetilde{H}_1,$$

其中$\ker(L-\lambda_{N+1}Id)$是有限维特征子空间而$\widetilde{H}_1$ 为$\ker(L-\lambda_{N+1}Id)$在$\widetilde{H}$ 中的直交补. 于是$u_k \in \{u_k\}$ 可唯一地分解成$\widetilde{u}_k = w_k + v_k$, 这里$w_k \in \ker\ (L - r_{N+1}Id)$ 而$v_k \in \widetilde{H}_1$. 利用不等式(5.6) 和(5.7) 可推知：$v_k \to 0$ (当$k \to \infty$). 因$1 = \|\widetilde{u}_k\|^2 = \|w_k\|^2 + \|v_k\|^2$ 及$\dim\ker(L-\lambda_{N+1}Id) < +\infty$, 故$\{w_k\}$ 中有子列，不妨仍记为$\{w_k\}$, 使$w_k \xrightarrow{L^2} w$, $w \in \ker(L-\lambda_{N+1}Id)$ 且$\|w\| = 1$. 从而推知

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \ge& \big(L\widetilde{u}_k-(\lambda_N+p)\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k\big)\\ =& \big(Lw_k-(\lambda_N+p)w_k,\ w_k\big) - 2\big((\lambda_N+p)w_k,\ v_k\big)\\ &+ \big(Lv_k-(\lambda_N+p)v_k,\ v_k\big)\\ \ge& \big((\lambda_{N+1}-(\lambda_N+p))w_k,w_k\big) - 2\big((\lambda_N+p)w_k,\ v_k\big)\\ &+ (\lambda_{N+2}-\lambda_{N+1})\|v_k\|^2.\end{aligned}$$

让$k \to \infty$, 得

$$0 \geq \int_\Omega \big(\lambda_{N+1} - (\lambda_N + p)\big) w^2(x)\, dx.$$

由于$p(x) \leq \lambda_{N+1} - \lambda_N = r$ 对a.e. $x \in \Omega$ 成立，我们有：当$w \in \ker(L - \lambda_{N+1} Id)$ 时

$$0 = \int_\Omega \big(r - p(x)\big) w^2(x)\, dx.$$

由此及假设(5.2), 可知$w = 0$. 这与$\|w\| = 1$矛盾！因此(5.5) 成立.

∎

引理 2 设$p \in L^\infty(\Omega)$ 满足引理1 中的条件，δ 为相应于p 通过引理1 而存在的常数. 设$\varepsilon > 0$. 则对于任何满足

$$0 \leq q(x) \leq p(x) + \varepsilon, \qquad \text{a.e.} \quad x \in \Omega$$

的$q \in L^\infty(\Omega)$, 及$\forall u \in D(L)$, 有

$$D_q(u) \triangleq \big(Lu - (\lambda_N + q)u,\ \widetilde{u} - (\overline{u} + u^0)\big) \geq (\delta - \varepsilon)\|u^\perp\|^2.$$

证明 $\forall u \in D(L)$, 我们有

$$\begin{aligned} D_q(u) =& \big(L\widetilde{u} - (\lambda_N + q)\widetilde{u},\ \widetilde{u}\big) + \lambda_N(\overline{u}, \overline{u}) - (L\overline{u}, \overline{u}) \\ &+ \big(q(\overline{u} + u^0),\ \overline{u} + u^0\big) \\ \geq& \big(L\widetilde{u} - (\lambda_N + p)\widetilde{u},\ \widetilde{u}\big) + \lambda_N(\overline{u}, \overline{u}) - (L\overline{u}, \overline{u}) - \varepsilon\|\widetilde{u}\|^2, \end{aligned}$$

再利用引理1, 便可推得.

∎

引理 3 设$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足Carathéodory 条件且满足

(i) 存在函数$a, A \in H$ 及常数$R_1, R_2 : R_1 < 0 < R_2$ 使

$$g(x, u) \geq A(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega \quad 及 \quad \forall u \in \mathbb{R} :\ u \geq R_2;$$

$$g(x, u) \leq q(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega \quad 及 \quad \forall u \in \mathbb{R} :\ u \leq R_1;$$

(ii) 存在函数$b, c \in H$ 及常数$B \geq 0$ 使

$$|g(x,u)| \leq c(x)|u| + b(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega \text{ 及 } \forall u : |u| \geq B.$$

则对每个实数$k > 0, g$ 可分解为

$$g(x,u) = q_k(x,u) + g_k(x,u), \tag{5.8}$$

其中q_k, g_k 均满足Carathéodory 条件且满足

(i) $0 \leq uq_k(x,u)$ a.e. $x \in \Omega$, $\forall u \in \mathbb{R}$; (5.9)

(ii) $|q_k(x,u)| \leq c(x)|u| + b(x) + k$ 对 a.e. $x \in \Omega$, $\forall u : |u| \geq \max(1, B)$ 成立;

(iii) 存在$\sigma_k \in H$ (σ_k 依赖于g, a, A) 使得

$$|g_k(x,u)| \leq \sigma_k(x) \tag{5.10}$$

对a.e. $x \in \Omega$ 及$u \in \mathbb{R}$ 成立.

证明从略.

3.5.2 抽象存在性结果

设$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足Carathéodory 条件; g 至多线性增长, 即存在实数$d \geq 0$ 及$e \in H$, 使

$$|g(x,u)| \leq d|u| + e(x). \tag{5.11}$$

当(5.11) 成立时, g 的Nemytskii 映象$G : H \to H$

$$Gu = g\big(x, u(x)\big)$$

连续且将有界集映成有界集. 这里设$h \in H$.

设$\lambda_N \in \sigma(L)$, 考察方程

$$Lu = \lambda_N u + Gu - h \tag{5.12}$$

的可解性.

在给出主要结果之前，我们再回忆一下3.5.1 中的如下规定：当$\dim\ker L=\infty$ 时，我们总假设$0<\lambda_N<\lambda_{N+1}$ 或$\lambda_N<\lambda_{N+1}<0$ 同时$(\mathrm{sign}\lambda_N)g(x,\cdot)$ 不减对a.e. $x\in\Omega$ 成立.

定理 3.5.1[84] 假设对$\forall\varepsilon>0,\exists$ 常数$B=B(\varepsilon)>0$ 及函数$b=b(x)\in L^\infty(\Omega)$, 使

$$|g(x,u)|\le\big(p(x)+\varepsilon\big)|u|+b(x)\tag{5.13}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$\forall u:|u|\ge B$ 成立，其中$p\in L^\infty(\Omega)$ 且满足对a.e. $x\in\Omega$, 有

$$p(x)\le\lambda_{N+1}-\lambda_N=r\quad 及\quad\int_\Omega\big(r-p(x)\big)w^2(x)\,dx>0\tag{5.14}$$

对$\forall w\in\ker(L-\lambda_{N+1}Id)\backslash\{0\}$ 成立.

进一步，设存在函数$a,A\in H$ 及常数$R_1,R_2:R_1<0<R_2$ 使

$$g(x,u)\ge A(x)\quad \text{a.e. } x\in\Omega\ 及\ u\ge R_2,\tag{5.15}$$

$$g(x,u)\le a(x)\quad \text{a.e. } x\in\Omega\ 及\ u\le R_1,\tag{5.16}$$

则对满足条件：$\forall v\in\ker(L-\lambda_N Id)\backslash\{0\}$,

$$\int_\Omega h(x)v(x)\,dx<\int_{v>0}g_+(x)v(x)\,dx+\int_{v<0}g_-(x)v(x)\,dx\tag{5.17}$$

的$h\in H$, 方程(5.12) 至少有一个解. 其中

$$g_+(x)=\liminf_{u\to+\infty}g(x,u),\qquad g_-(x)=\limsup_{u\to-\infty}g(x,u).$$

证明 第一步. 取δ 为相应于p 通过引理1 而存在的$\delta(p)>0$. 则由假设(5.13), 存在一个常数$B=B(\delta)>0$ 及一个函数$b=b(x)\in L^\infty(\Omega)$, 使对 a.e. $x\in\Omega$ 及$\forall u\in\mathbb{R}:|u|\ge B$ 有

$$|g(x,u)|\le\left(p(x)+\frac{\delta}{4}\right)|u|+b(x).\tag{5.18}$$

利用$k=1$时的引理3, 方程(5.12) 可改写成

$$Lu-\lambda_N u-q_1\big(\cdot,u(\cdot)\big)-g_1\big(\cdot,u(\cdot)\big)=-h(\cdot), \tag{5.19}$$

其中q_1 和g_1 满足Carathéodory 条件及条件(5.10) 和(5.9), 并且

$$|q_1(x,u)|\le\left(p(x)+\frac{\delta}{4}\right)|u|+b(x)+1 \tag{5.20}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$\forall u:|u|\ge\max(1,B)$ 成立.

选取$\overline{B}>\max(1,B)$, 使

$$\frac{b(x)+1}{|u|}<\frac{\delta}{4} \tag{5.21}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$|u|\ge\overline{B}$ 成立. 由(5.20) 和(5.21) 推知

$$0\le\frac{q_1(x,u)}{u}\le p(x)+\frac{\delta}{2} \tag{5.22}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$|u|\ge\overline{B}$ 成立.

第二步, 定义$\widetilde{\nu}:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\widetilde{\nu}(x,u)=\begin{cases}\dfrac{q_1(x,u)}{u} & |u|\ge\overline{B},\\ \dfrac{q_1(x,\overline{B})}{\overline{B}}\cdot\dfrac{u}{\overline{B}}+\left(1-\dfrac{u}{\overline{B}}\right)p(x) & 0\le u<\overline{B},\\ \dfrac{q_1(x,-\overline{B})}{\overline{B}}\cdot\dfrac{u}{\overline{B}}+(1+\dfrac{u}{\overline{B}})p(x) & -\overline{B}<u\le 0.\end{cases}$$

不难看出, $\widetilde{\nu}$ 满足Carathéodory 条件. 进而由(5.22) 可知

$$0\le\widetilde{\nu}(x,u)\le p(x)+\frac{\delta}{2} \tag{5.23}$$

对a.e. $x\in\Omega$ 及$\forall u\in\mathbb{R}$ 成立.

定义$f:\Omega\times I\!R\to I\!R$

$$f(x,u)=g_1(x,u)+q_1(x,u)-\widetilde{\nu}(x,u)u,$$

则由(5.11) 可知：存在$\sigma\in H$, 使对a.e. $x\in\Omega$, $\forall u\in R$, 有

$$|f(x,u)|\leq\sigma(x). \tag{5.24}$$

现在方程(5.12) 可以等价地写成

$$Lu-\lambda_N u-\widetilde{\nu}(\,\cdot\,,u)u-f(\,\cdot\,,u)=-h. \tag{5.25}$$

下面对(5.25) 运用Mawhin 延拓定理.

记

$$\begin{aligned}
&N:H\to H, &&u\to\widetilde{\nu}\big(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,)\big)u(\,\cdot\,)+f(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))-h(\,\cdot\,),\\
&A:H\to H, &&u\to\frac{\delta}{2}u(\cdot),
\end{aligned}$$

则(5.25) 等价于

$$Lu-\lambda_N u-Nu=0 \tag{5.26}$$

在$D(L)$ 中成立.

如果ker$L$ 是有限维的，按照常规可以验证L 为线性0 指标Fredholm 算子，N 和L 均在H 的有界子集上L- 紧. 由延拓定理(定理1.7.7) 可知：证方程(5.26) 至少有一个解，只要证得同伦方程

$$Lu-\lambda_N(u)-(1-\chi)Au-\chi Nu=0 \qquad \chi\in[0,1) \tag{5.27}$$

的所有可能解有不依赖于χ 的先验界，即存在不依赖于χ (和解u) 的正常数k_0, 使

$$\|u\|\leq k_0.$$

如果$\ker L$ 是无限维的，由我们对g 所作的规定，不难推出，N 在H 上是单调的. 因L 的右逆K 是紧的，故KQN 在H 的有界集上紧(注$Q: H \to \mathrm{Rang}\, L$ 为直交投影). 另一方面，由A 的定义，A 在H 上强单调. 据延拓定理(定理1.7.10), 欲证(5.26) 有解，只要证得(5.27) 的所有可能解有一个不依赖于$\chi \in [0,1)$ 的先验界.

如果$u \in D(L)$ 为某个$\chi \in [0,1)$ 时的(5.27) 的解，则我们有

$$Lu - \lambda_N u - [(1-\chi)\frac{\delta}{2} + \chi\widetilde{\nu}(x, u(x))]u(x) - \chi f(x, u(x)) + \chi h(x) = 0. \tag{5.28}$$

由(5.23), 得

$$0 \le (1-\chi)\frac{\delta}{2} + \chi\widetilde{\nu}(x, u(x)) \le p(x) + \frac{\delta}{2}$$

对a.e. $x \in \Omega$ 成立.

当$\chi = 0$ 时，显然方程(5.28) 仅有平凡解. 现在，如果$u \in D(L)$ 为某个$\chi \in (0,1)$ 时的(5.28) 的解，利用引理2 及Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\widetilde{u} - (\overline{u} + u^0), Lu - \left[\lambda_N + (1-\chi)\frac{\delta}{2} + \chi\widetilde{\nu}(\cdot, u(\cdot))\right] u\right) \\ &+ \chi\big(\widetilde{u} - (\overline{u} + u^0), h - f(\cdot, u(\cdot))\big) \\ \ge &\frac{\delta}{2}\|u^\perp\|^2 - \big(\|\widetilde{u}\| + \|\overline{u}\| + \|u^0\|\big)\big(\|h\| + \|f(\cdot, u(\cdot))\|\big). \end{aligned}$$

由不等式(5.24), 我们有

$$0 \ge \frac{\delta}{2}\|u^\perp\|^2 - \beta(\|u^\perp\| + \|u^0\|), \tag{5.29}$$

其中β 为仅依赖于σ 和h (不依赖于u 和χ) 的常数. 令$\alpha = \frac{\beta}{\delta}$, 则有

$$\|u^\perp\| \le \alpha + (\alpha^2 + 2\alpha\|u^0\|)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.30}$$

第三步　下证存在一个不依赖于$\chi \in (0,1)$ 的常数$k_0 > 0$, 使(5.28) 的所有可能解$u \in D(L)$ 均满足

$$\|u\| \leq k_0.$$

反设不然，则存在$\{\chi_n\} \subset (0,1)$ 及序列$\{u_n\} \subset D(L), \|u_n\| \to \infty$ 使

$$-Lu_n + \lambda_N u + (1-\chi_n)\frac{\delta}{2}u_n + \chi_n g(\cdot, u_n) = \chi_n h. \tag{5.31}$$

由(5.30) 可推知

$$\|u_n^0\| \to \infty, \quad \frac{\|u_n^\perp\|}{\|u_n^0\|} \to 0. \tag{5.32}$$

令

$$v_n = \frac{u_n^0}{\|u_n^0\|}, \quad 则 \quad \|v_n\| = 1,$$

利用$\dim\ker\,(L - \lambda_N Id) < +\infty$ 及(5.32) 的第二个关系式，推知：存在$v \in \ker(L - \lambda_N Id), v \neq 0$ 及$\{\frac{u_n}{\|u_n^0\|}\}$ 的一个子列，不妨仍记为$\{\frac{u_n}{\|u_n^0\|}\}$, 使

$$\begin{aligned} &\frac{u_n}{\|u_n^0\|} \to v \qquad 于\ H \\ &\frac{u_n(x)}{\|u_n^0\|} \to v(x) \qquad \text{a.e.} \\ &v_n(x) \to v(x) \qquad \text{a.e.} \end{aligned} \tag{5.33}$$

(5.31) 两边都与v_n 作内积，然后再利用u_n^0 与$v_n^\perp$ 的直交性，可推得

$$\chi_n\big(h - g(\cdot, u_n), v_n\big) = (1-\chi_n)\frac{\delta}{2}\|u_n^0\|.$$

由于$0 < \chi_n < 1$, 以χ_n 除以上式两边，推得

$$0 \leq \int_\Omega \big(h(x) - g(x, u_n(x))\big) v_n(x)\, dx.$$

于是

$$
\begin{aligned}
0 \leq &\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \big(h(x) - g(x, u_n(x))\big) v_n(x)\, dx \\
\leq &\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) v_n(x) dx + \limsup_{n\to+\infty} \left(- \int_\Omega g(x, u_n(x)) v_n(x)\, dx \right) \\
= &\int_\Omega h(x) v(x)\, dx - \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g\big(x, u_n(x)\big) v_n(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

故

$$
\int_\Omega h(x) v(x)\, dx \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g\big(x, u_n(x)\big) v_n(x)\, dx. \tag{5.34}
$$

记

$$
I^+ = \big\{x \in \Omega \mid v(x) > 0\big\}, \qquad I^- = \big\{x \in \Omega \mid v(x) < 0\big\}.
$$

注意：因$v \neq 0$, 故I^+ 和I^- 不可能同时为空集．以下我们假定I^+ 和I^- 均不空，剩余的情形同理可证．由于$\frac{u_n^\perp(x)}{\|u_n^0\|} \to 0$ a.e. 于Ω (参(5.32) 的第二式)．故对a.e. $x \in I^+$, 存在一个非负整数$M(x)$, 使对$\forall n \geq M(x)$, 有

$$
\frac{|u^\perp(x)|}{\|u_n^0\|} < \frac{1}{4} v(x) \quad 及 \quad \big|v_n(x) - v(x)\big| < \frac{1}{4} v(x).
$$

因此，当$n \geq M(x)$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\frac{u_n(x)}{\|u_n^0\|} = &\frac{1}{\|u_n^0\|}\big(u_n^0(x) + u_n^\perp(x)\big) \\
&\geq v_n(x) - \frac{\|u_n^\perp\|}{\|u_n^0\|} \geq \big(v_n(x) - v(x)\big) + \left(v(x) - \frac{1}{4} v(x)\right) \\
&\geq -\frac{1}{4} v(x) + \frac{3}{4} v(x) = \frac{1}{2} v(x).
\end{aligned}
$$

推知：对a.e. $x \in I^+, u_n(x) \geq \frac{1}{2}v(x)\|u_n\| \to +\infty$. 我们也不难得到 I^- 上的类似关系式. 即我们有

$$\begin{aligned} u_n(x) \to +\infty \qquad &\text{a.e. 于} \quad I^+ \\ u_n(x) \to -\infty \qquad &\text{a.e. 于} \quad I^-. \end{aligned} \tag{5.35}$$

现在，为了对(5.34) 运用Fatou 引理，我们需要找到一个非负整数 n_0, 使当$n \geq n_0$ 时

$$g\big(x, u_n(x)\big)v_n(x) \geq k(x)$$

对某函数$k(\cdot) \in L^1(\Omega)$ 成立. 事实上，从关系式(5.29) 可知

$$\frac{\|u_n^\perp\|^2}{\|u_n^0\|} \leq \frac{2\alpha\|u_n^\perp\|}{\|u_n^0\|} + 2\alpha.$$

另一方面，由(5.33) 知：存在非负整数n_0, 当$n \geq n_0$ 时，$\frac{\|u_n^\perp\|}{\|u_n^0\|} < 1$. 故当$n \geq n_0$ 时，$\frac{\|u_n^\perp\|^2}{\|u_n^0\|} \leq 4\alpha$. 即序列$\{\frac{u_n^\perp}{\sqrt{\|u_n^0\|}}\}$ 在H 中有界；亦即存在$k_1 \in H$, 使

$$\frac{|u_n^\perp|}{\sqrt{\|u_n^0\|}} \leq k_1(x)$$

对 a.e. $x \in \Omega$ 及$\forall n : n \geq n_0$ 成立. 由$\widetilde{\nu}(x, u_n(x)) \geq 0$ a.e., 可知：当 $n \geq n_0$ 时

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nu}\big(x, u_n(x)\big)u_n(x)v_n(x) = \widetilde{\nu}\big(x, u_n(x)\big)u_n(x)\frac{u_n^0(x)}{\|u_n^0\|} \\ =&\frac{1}{2}\widetilde{\nu}\big(x, u_n(x)\big)\frac{1}{\|u_n^0\|}\left[\big(u_n(x)\big)^2 + \big(u_n^0(x)\big)^2 - \big(u_n(x) - u_n^0(x)\big)^2\right] \\ \geq& -\frac{1}{2}\widetilde{\nu}\big(x, u_n(x)\big)\ \big(u_n^\perp(x)\big)^2\frac{1}{\|u_n^0\|} \\ \geq& -\frac{1}{2}\widetilde{\nu}\big(x, u_n(x)\big)\big(k_1(x)\big)^2. \end{aligned}$$

故对$\forall n: n \geq n_0$ 有

$$\widetilde{\nu}\big(x,\, u_n(x)\big)u_n(x)v_n(x) \geq -\frac{1}{2}\Big(p(x)+\frac{\delta}{2}\Big)k_1^2(x) \qquad \text{a.e.}$$

于是，利用g 的分解式(5.25) 可知：当$n \geq n_0$ 时，

$$\begin{aligned} g\big(x,u_n(x)\big)v_n(x) =& \widetilde{\nu}\big(x,u_n(x)\big)u_n(x)v_n(x)+f\big(x,u_n(x)\big)v_n(x) \\ \geq& \frac{1}{2}\Big(p(x)+\frac{\delta}{2}\Big)k_1^2(x)-\sigma(x)K_1(x) \triangleq k(x), \end{aligned}$$

其中$K_1 \in H$ 满足$|v_n(x)| \leq K_1(x)$ a.e.

至此，由(5.34) 和(5.35), 再利用Fatour 引理，推得

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)v(x)\,dx \geq& \liminf_{n\to+\infty}\int_{v>0} g\big(x,u_n(x)\big)v_n(x)\,dx \\ &+\liminf_{n\to\infty}\int_{v<0} g\big(x,u_n(x)\big)v_n(x)\,dx \\ \geq& \int_{v>0}\liminf_{n\to\infty} g\big(x,u_n(x)\big)\cdot\lim_{n\to\infty} v_n(x)\,dx \\ &+\int_{v<0}\liminf_{n\to\infty}\big(-g(x,u_n(x))\big)\lim_{n\to\infty}\big(-v_n(x)\big)\,dx \\ \geq& \int_{v>0} g_+(x)v(x)\,dx+\int_{v<0} g_-(x)v(x)\,dx, \end{aligned}$$

这与题设(5.17) 矛盾！表明(5.28) 的所有可能解确有不依赖于$\chi \in [0,1)$ 的先验界. ∎

注 用与定理3.5.1 的证明完全类似的证法，可以建立定理3.5.1 的"共轭" 定理. 即先改变(5.15), (5.16) 和(5.17) 中的不等号的方向；进一步设$g_+(x)=\limsup\limits_{u\to+\infty} g(x,u)$ 和$g_-(x)=\liminf\limits_{u\to-\infty} g(x,u)$, 并规定$0<\lambda_{N-1}<\lambda_N$, 或$\lambda_{N-1}<\lambda_N<0$ 同时sing $r_N g(x,\cdot)$ 不增. 最后在$0 \leq p(x) \leq \lambda_N-\lambda_{N-1}=r$ 及$\int_\Omega (r-p(x))^2 w^2(x)\,dx>0$ 下进行讨论.

3.5.3 应用

(I) 二阶常微分方程的周期解

考虑

$$
\begin{aligned}
&-u''(x)-N^2u(x)=g(x,u(x))-h(x)\\
&u(0)-u(2\pi)=u'(0)-u'(2\pi)=0,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

其中N 是一个非负整数，$h\in H=L^2(0,2\pi)$.

定义 $L:D(L)\subset H\to H$

$$Lu=-u'',$$

其中

$$D(L)=\left\{u:[0,2\pi]\to I\!R\;\middle|\;\begin{aligned}&u,u' \text{ 绝对连续于 } [0,\pi],u''\in H\\&u(0)-u(2\pi)=u'(0)-u'(2\pi)=0\end{aligned}\right\}.$$

在§1.1 中我们已经知道：$\lambda_N=N^2$, $N=0,1,2,\cdots$. λ_N 所对应的特征子空间为span $\{\sin Nx,\ \cos Nx\}$.

显见，定理3.5.1 可运用于(5.36), 而定理3.5.1 的条件(5.14) 可变为：$p(x)\le 2N+1$ 且严格不等式在$\Omega=[0,2\pi]$ 的一个正测度上成立.

(II) 椭圆方程边值问题

设$\Omega\subset I\!R^n$ 为有界开集($n\ge 1$). 设

$$L=\sum_{|i|,|j|\le m}(-1)^{|i|}D^i\big(a_{ij}(x)D^j\big)$$

是一个强椭圆算子. 假定$a_{ij}\in L^\infty(\Omega),a_{ij}=a_{ji}$, 对$|i|,|j|\le m$; 而$a_{ij}$ 在Ω 上一致连续，对$|i|=|j|=m$.

设$B[\cdot,\cdot]$ 为L 的Dirichlet 双线性型

$$B[\varphi,\psi]=\int_\Omega\sum_{|i|,|j|\le m}a_{ij}(x)D^i\varphi(x)D^j\psi(x)\,dx,$$

$\forall \varphi, \psi \in C_0^{\infty}$. 因$a_{ij} = a_{ji}$, 故$B$ 是对称的. 记$H_0^m = W_0^{m,2}(\Omega)$.

如果存在一个实数r 及一个函数$u \in H_0^m, u \neq 0$ 使对$\forall \varphi \in H_0^m$, 有

$$B[u, \varphi] = r(u, \varphi)_0 \triangleq r \int_{\Omega} u\varphi \, dx,$$

则称r 为广义Dirichlet 问题的特征值, 称u 为相应于r 的特征函数.

这些特征值构成一个增序列$r_1, r_2, \cdots$, 且当$N \to \infty$ 时, $r_N \to \infty$. 相应于每个特征值的特征子空间的维数均有限.

现设$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足Carathéodory 条件且至多线性增长. 考虑Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &Lu = r_N u + g(\cdot, u) - h(\cdot) && x \in \Omega \\ &\frac{\partial^i u}{\partial \eta^i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, m-1) && x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.37}$$

的可解性. 其中$\frac{\partial}{\partial \eta}$ 为$\partial\Omega$ 上的外法向导数.

如果函数$u \in H_0^m$ 满足: 对$\forall \varphi \in H_0^m$,

$$B[u, \varphi] = r_N(u, \varphi)_0 + (g(\cdot, u), \varphi)_0 - (h, \varphi)_0, \tag{5.38}$$

则称u 为(5.37) 的一个弱解.

记$\widetilde{L} : D(\widetilde{L}) \subset H \to H$

$$(\widetilde{L}u, v)_0 = B[u, v] \qquad \forall u \in D(\widetilde{L}), \quad v \in H_0^m,$$

其中$D(\widetilde{L}) = \{u \in H_0^m \mid v \to B[u, v]$ 在H- 范数下连续$\}$. 则$\widetilde{L}$ 是一个具有紧预解式的0- 指标线性Fredholm 算子. 由此, 定理3.5.1 可运用于(5.37) 弱解的存在性研究.

(III) 非线性波方程边值问题的时间周期解.

取$\Omega=(0,2\pi)\times(0,\pi)\subset \mathbb{R}^2$, $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足Carathéodory条件且至多线性增长. 考虑问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\lambda_N u+g(t,x,u)-h(t,x) & (t,x)\in\Omega \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 & t\in(0,2\pi) \\ u(0,x)=u(2\pi,x)=0 & x\in(0,\pi), \end{cases} \tag{5.39}$$

其中$h\in H$ 而$\lambda_N=n^2-m^2$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda_N\neq 0$.

定义 $L:D(L)\subset H\to H$

$$Lu=\sum_{m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}^+}(n^2-m^2)u_{mn}v_{mn}.$$

其中$v_{mn}=\pi^{-1}e^{imt}\sin nx$, $u_{mn}=(u,v_{mn})$. 由§1.1 或§2.2 知, $\sigma(L)=\{n^2-m^2\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^+\}$ 且在假定$0<\lambda_N<\lambda_{N+1}$ 或$\lambda_N<\lambda_{N+1}<0$, 并且$\operatorname{sign} g(t,x,\cdot)$ 不减时, 定理3.5.1 可用于讨论(5.39) 的弱解的存在性(注: 弱解定义参见§2.2). 这时, 定理3.5.1 的条件(5.14) 等价于$p(t,x)\leq\lambda_{N+1}-\lambda_N=r$ a.e. 且严格不等号在Ω 的一个正测度上成立.

(IV) 非线性梁方程边值问题的时间周期解.

设Ω 和g 同(III) 中的Ω 和g. 考虑

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}=\lambda_N u+g(t,x,u)-h(t,x) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0, & t\in[0,2\pi) \\ u(0,x)=u(2\pi,x), & x\in(0,\pi), \end{cases} \tag{5.40}$$

其中$h\in H$, $\lambda_N=n^4-m^2, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}^+, \lambda_N\neq 0$ 且$(\operatorname{sign}\lambda_N)g(t,x,\cdot)$ 对a.e. $(t,x)\in\Omega$ 单调增. 则定理3.5.1 的结果可仿(III) 的操作过程用于对(5.40) 的研究.

§ 3.6 两点边值问题 • 渐近非一致 • 延拓定理

在§3.3 和§3.4 中，我们假设非线性项g 满足符号条件

$$ug(x,u) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

并分别讨论了椭圆方程Dirichlet 问题和二阶常微分方程两点边值问题的可解性. 但讨论的前提是g 渐近一致增长.

本节的目的的是在g 渐近非一致增长的前提下，研究符号条件(6.1) 及其推广形式

$$ug(x,u) \geq 0 \qquad \forall u : |u| \geq r_0 > 0 \tag{6.2}$$

成立时，Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned} u''(x) + u(x) + g(x,u(x)) &= h(x) \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

及Neumann 边值问题

$$\begin{aligned} u''(x) + u(x) + g(x,u(x)) &= h(x) \\ u'(x) = u'(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

的可解性.

3.6.1 符号条件下的 Dirichlet 边值问题

先介绍一些记号. 除了Banach 空间$L^p(0,\pi)$ 及$C^k[0,\pi]$ 外，本节还需要Sobolev 空间$W_0^{1,2}(0,\pi) \triangleq H_0^1(0,\pi)$ 及$W^{2,2}(0,\pi) \triangleq H^2(0,\pi)$. 我们取$L^2(0,\pi)$ 的内积为

$$(u,v) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)v(x)\,dx,$$

且$H_0^1(0,\pi)$ 及$H^2(0,\pi)$ 中的内积跟着作相应的变化.

设$h\in L^2(0,\pi), g:[0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对$L^2(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件，即g 满足Carathéodory 条件且对$\forall\, r>0$, $\exists\, v_r\in L^2(0,\pi)$, 使

$$|g(x,u)|\le \nu_r(x) \tag{6.5}$$

对a.e. $x\in(0,\pi)\,\forall\, u\in\mathbb{R}, |u|<r$ 成立.

定理 3.6.1[86] 假设

$$g(x,u)u\ge 0 \tag{6.6}$$

对a.e. $x\in(0,\pi)$ 及$\forall u\in\mathbb{R}$ 成立. 进一步，假设对$\forall a>0$, 存在数$R=R(\sigma)>0$ 及$b=b_\sigma\in L^\infty(0,\pi)$ 使

$$|g(x,u)|\le(\Gamma(x)+\sigma)|u|+b(x) \tag{6.7}$$

对a.e. $x\in(0,\pi)$ 及$\forall\, u\in\mathbb{R}, |u|\ge \mathbb{R}$ 成立. 其中$\Gamma\in L^\infty(0,\pi)$ 满足:

$$0\le\Gamma(x)\le 3 \quad \text{a.e.} \quad 于\ (0,\pi) \tag{6.8}$$

及

$$\operatorname{meas}\{x\in(0,\pi)\mid \Gamma(x)<3\}>0,$$

则对

$$\forall\, h\in\left\{w:[0,\pi]\to\mathbb{R}\mid w\in L^2(0,\pi) \quad 且 \quad \int_0^\pi w\sin x dx=0\right\},$$

Dirichlet 边值问题(6.3) 至少有一个解.

注 这里(6.3) 的一个解是指一个使方程(6.3) a.e. 成立的函数$u\in H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)$.

为了给出证明，我们需要以下记号和引理.

对$\forall u \in H_0^1(0,\pi)$, 我们将$u$ 分解成

$$u(x) = \overline{u}(x) + \widetilde{u}(x), \tag{6.9}$$

其中

$$\overline{u} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u(s)\sin s\, ds\right)\sin x.$$

而

$$\int_0^\pi \widetilde{u}(x)\sin x\, dx = 0.$$

记

$$\widetilde{H}_0^1(0,\pi) = \left\{u \in H_0^1(0,\pi) \mid \int_0^\pi u(s)\sin s\, ds = 0\right\},$$
$$\overline{H}_0^1(0,\pi) = \{u \in H_0^1(0,\pi) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \text{使}\ u = \alpha \sin x \quad \text{a.e. 于}\ (0,\pi)\},$$

则

$$H_0^1(0,\pi) = \overline{H}_0^1(0,\pi) \oplus \widetilde{H}_0^1(0,\pi).$$

引理 1 设$\Gamma \in L^\infty(0,\pi)$ 满足

$$0 \le \Gamma(x) \le 3 \quad \text{a.e 于}(0,\pi)$$

及

$$\text{meas}\{x \in (0,\pi) \mid \Gamma(x) < 3\} > 0,$$

则存在$\delta = \delta(\Gamma) > 0$, 使对$\forall u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$, 有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [u''(x) + u(x) + \Gamma(x)u(x)][\overline{u}(x) - \widetilde{u}(x)]\, dx \ge \delta |\widetilde{u}|_{H^1}^2.$$

证明　利用$\overline{u}$ 与$\widetilde{u}$ 在$L^2(0,\pi)$ 中的直交性，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [u''(x) + u(x) + \Gamma(x)u(x)][\overline{u}(x) - \widetilde{u}(x)]\, dx \\
=&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(\widetilde{u}'(x))^2 - (1+\Gamma(x))(\widetilde{u}(x))^2]\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Gamma(x)(\overline{u}(x))^2\, dx \\
\ge&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(\widetilde{u}'(x))^2 - (1+\Gamma(x))(\widetilde{u}(x))^2]\, dx \triangleq D_\Gamma(\widetilde{u}).
\end{aligned}$$

再由Fourier 级数及Parseval 恒等式，可知：$D_\Gamma(\widetilde{u}) \geq 0$ 且等号成立的充要条件为$\widetilde{u}(x) = A\sin 2x$ a.e. 对某$A \in \mathbb{R}$. 但由于等号成立时有

$$0 = D_\Gamma(\widetilde{u}) = A^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (3 - \Gamma(x)) \sin^2 2x \, dx,$$

故据题设推得$A = 0$, 进而$\widetilde{u} = 0$.

下证存在一个常数$\delta = \delta(\Gamma) > 0$, 使

$$D_\Gamma(\widetilde{u}) \geq \delta |\widetilde{u}|_{H^1}^2.$$

反设不然，则存在序列$\{\widetilde{u}_n\} \subset \widetilde{H}_0^1(0,\pi)$ 及函数$\widetilde{u} \in \widetilde{H}_0^1(0,\pi)$, 使得$\{\widetilde{u}_n\}$ 中有子列，不妨仍记为$\{\widetilde{u}_n\}$ 满足

$$|\widetilde{u}_n|_{H^1} = 1, \quad \widetilde{u}_n \to \widetilde{u} \text{ 于 } C[0,\pi], \quad \widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u} \text{ 于 } \widetilde{H}_0^1(0,\pi), \tag{6.10}$$

并且

$$0 \leq D_\Gamma(\widetilde{u}_n) \leq \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

(注意：这里用到$H_0^1(0,x) \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\pi]$), 由于$\widetilde{H}_0^1(0,\pi)$ 是一个Hilbert 空间，$\widetilde{u}_n$ 在$\widetilde{H}_0^1(0,\pi)$ 中弱收敛于$\widetilde{u}$, 故我们有

$$|\widetilde{u}|_{H'}^2 \leq \liminf_{n\to\infty} |\widetilde{u}_n|_{H^1}^2.$$

从(6.10) 和(6.11), 我们得：当$n \to \infty$ 时，

$$|\widetilde{u}_n|_{H^1}^2 \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \Gamma(x))(\widetilde{u}(x))^2 \, dx. \tag{6.12}$$

从而

$$|\widetilde{u}|_{H^1}^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \Gamma(x))(\widetilde{u}(x))^2 \, dx,$$

即

$$D_\Gamma(\widetilde{u}) \leq 0.$$

由证明的前半部分可知：$\widetilde{u}=0$. 因此从(6.12): $|\widetilde{u}_n|_{H^1}\to 0$. 这与(6.10) 的第一个等式$|\widetilde{u}_n|_{H^1}=1$ 矛盾！ ▮

引理 2 设Γ 满足引理1 的条件而$\delta>0$ 为相应于Γ 通过引理1 而确定的常数. 设$\sigma>0$ 为常数. 则对于任意满足条件

$$0\le p(x)\le \Gamma(x)+\sigma \qquad \text{a.e.} \quad 于\ [0,\pi] \tag{6.13}$$

的$p\in L^\infty(0,\pi)$ 及$\forall\, u\in H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)$, 有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [u''(x)+u(x)+p(x)u(x)](\overline{u}(x)-\widetilde{u}(x))\,dx\ge(\delta-\sigma)|\widetilde{u}|_{H^1}^2.$$

证明 由引理1 证明的计算过程，可得

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [u''(x)+u(x)+p(x)u(x)]\big(\overline{u}(x)-\widetilde{u}(x)\big)\,dx\\ \ge&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [(\widetilde{u}'(x))^2-(1+p(x))(\widetilde{u}(x))^2]\,dx\triangleq D_p(\widetilde{u}).\end{aligned}$$

利用(6.13) 的第二个不等式，我们有

$$D_p(\widetilde{u})\ge D_\Gamma(\widetilde{u})-\sigma\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\widetilde{u}(x))^2\,dx.$$

由Perserval 恒等式及引理1，立即推知

$$D_p(\widetilde{u})\ge(\delta-\sigma)|\widetilde{u}|_{H^1}^2. \qquad ▮$$

记

$$H_\pi^2(0,x)=H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)=\{u\in H^2(0,\pi)\mid u(0)=u(\pi)=0\}, \tag{6.14}$$

利用$H^2(0,\pi)\hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\pi]$ 的事实推知：$H_\pi^2(0,\pi)$ 为Hilbert 空间$H^2(0,\pi)$ 的闭子空间. 故$H_\pi^2(0,\pi)$ 为$H^2(0,\pi)$ 的内积下的Hilbert 空间.

引理 3 设$q \in (0,3)$ 为固定常数. 则存在一个常数$\eta > 0$, 使对$\forall u \in H_\pi^2(0,\pi)$, 有

$$|u'' + u + qu|_{L^2} \geq \eta |u|_{H^2}.$$

证明 定义线性算子$E : H_\pi^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$,

$$Eu = u'' + u + qu,$$

则E 是1-1 对应且连续. 从而$E^{-1} : L^2(0,\pi) \to H_\pi^2(0,x)$ 也是连续的线性算子. 选取$\eta < \frac{1}{\|E^{-1}\|}$, 则$|Eu|_{L^2} \geq \eta |u|_{H^2}$. ▮

定理3.6.1 的证明 设$\delta > 0$ 为相应于Γ 通过引理1 所确定的δ. 则由题设(6.7) 知: 存在实数$R(\delta) > 0$ 及函数$b = b_\delta \in L^\infty(0,\pi)$, 使

$$|g(x,u)| \leq (\Gamma(x) + \frac{\delta}{4})|u| + b(x) \tag{6.15}$$

对a.e. $x \in (0,\pi)$ 及$\forall u \in \mathbb{R} : |u| \geq R$ 成立. 不失一般性, 我们能选取R 充分大, 使对 a.e. $x \in (0,\pi)$ 及$\forall u : |u| \geq \mathbb{R}$, 有

$$\frac{b(x)}{|u|} < \frac{\delta}{4}.$$

定义函数$\widetilde{\nu} : (0,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{\nu}(x,u) = \begin{cases} \dfrac{g(x,u)}{u} & |u| \geq R, \\ \dfrac{g(x,R)}{R} \cdot \dfrac{u}{R} + (1 - \dfrac{u}{R})\Gamma(x) & 0 \leq u \leq R, \\ \dfrac{g(x,-R)}{R} \cdot \dfrac{u}{R} + (1 + \dfrac{u}{R})\Gamma(x) & -R \leq u \leq 0, \end{cases}$$

则用题设(6.6) 及(6.15) 式, 我们有

$$0 \leq \widetilde{\nu}(x,u) \leq \Gamma(x) + \frac{\delta}{2} \tag{6.16}$$

对a.e. $x \in (0,\pi)$ 及$\forall u \in \mathbb{R}$ 成立. 进一步，函数$\widetilde{\nu}(x,u)u$ 满足Carathéodory 条件，且函数$f:(0,\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x,u)=g(x,u)-\widetilde{\nu}(x,u)u \tag{6.17}$$

满足：对a.e. $x\in(0,\pi)$ 及$\forall u\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x,u)|\le v(x), \tag{6.18}$$

其中$v\in L^2(0,\pi)$ 是一个仅依赖于Γ 和ν_r 的函数. (参(6.5) 式)

因此，问题(6.3) 可以等价地写成

$$\begin{aligned}&u''(x)+u(x)+\widetilde{\gamma}(x,u(x))u(x)+f(x,u(x))=h(x),\\&u(0)=u(\pi)=0.\end{aligned} \tag{6.19}$$

为证明(6.19) 至少有一个解，据Leray-Schauder 延拓方法，只要证得同伦方程

$$\begin{aligned}&u''+u+(1-\lambda)qu+\lambda\widetilde{\nu}(x,u)u+\lambda f(x,u)=\lambda h,\\&u(0)=u(\pi)=0\end{aligned} \tag{6.20}$$

(其中$q\in(0,3)$ 且$q<\frac{\delta}{2}, q$ 为常数) 的所有可能解在$C^1[0,\pi]$ 中有一个不依赖于$\lambda\in[0,1)$ 的先验界. 注意，由不等式(6.16) 可知

$$0\le(1-\lambda)q+\lambda\widetilde{\nu}(x,u)\le\Gamma(x)+\frac{\delta}{2} \tag{6.21}$$

对a.e. $x\in(0,\pi)$ 及$\forall u\in\mathbb{R}$ 成立.

显然对$\lambda=0$, 方程(6.20) 有唯一解. 现设$u\in H^2_\pi(0,\pi)$ 为(6.20) 对某$\lambda\in(0,1)$ 的解，则由引理2 及Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}0=&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\overline{u}(x)-\widetilde{u}(x))(u''(x)+u(x)+[(1-\lambda)q+\lambda\widetilde{\nu}(x,u(x))]u(x)\,dx\\&+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\overline{u}(x)-\widetilde{u}(x))(\lambda f(x,u(x))-\lambda h(x))\,dx\\\ge&\frac{\delta}{2}|\widetilde{u}|^2_{H^1}-(|\overline{u}|_{L^2}+|\widetilde{u}|_{L^2})(|f|_{L^2}+|h|_{L^2}),\end{aligned}$$

故据$H^1(0,\pi)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,\pi)$ 的事实及关系式(6.18) 推知

$$0\geq\frac{\delta}{2}|\widetilde{u}|_{H^1}^2-\beta(|\widetilde{u}|_{H^1}+|\overline{u}|_{H^1}),\tag{6.22}$$

其中β 是一个仅依赖于ν 和h 的常数. 令$\alpha=\frac{\beta}{\delta}$, 我们得

$$|\widetilde{u}|_{H^1}\leq\alpha+(\alpha^2+2\alpha|\overline{u}|_{H^1})^{1/2}.\tag{6.23}$$

下面将证明: 存在常数$\rho>0$, 使(6.20) 的所有可能解$u\in H_\pi^2(0,\pi)$ 均满足

$$|u|_{C^1}<\rho.\tag{6.24}$$

反设不然, 则存在$\{\lambda_n\}\subset(0,1),\{u_n\}\subset H_\pi^2(0,\pi)$: $|u_n|_{C^1}\geq n\ \forall n$, 并且使

$$\begin{aligned}&u''_n+u_n+(1-\lambda_n)qu_n+\lambda g(x,u_n)=\lambda_nh\\&u_n(0)=u_n(\pi)=0\end{aligned}\tag{6.25}$$

对任意自然数n 成立. 记$v_n=\frac{u_n}{|u_n|_{C^1}}$, 则我们有

$$v''_n+v_n+qv_n=\lambda_n\frac{h}{|u_n|_{C^1}}+\lambda_nqv_n-\lambda_n\frac{g(x,u_n(x))}{|u_n|_{C^1}}\tag{6.26}$$

或等价地, 写成

$$Ev_n=\lambda_n\frac{h}{|u_n|_{C^1}}+\lambda_nqv_n-\lambda_n\frac{g(x,u_n(x))}{|u_n|_{C^1}},\tag{6.27}$$

其中$E:H_\pi^2(0,\pi)\subset C^1(0,\pi)\to L^2(0,\pi)$ 定义为

$$Ev=v''+v+qv.$$

据引理3 及$H^2(0,\pi)\hookrightarrow\hookrightarrow C^1[0,\pi]$ 的事实, E 可逆并且E^{-1}: $L^2(0,\pi)\to C^1[0,\pi]$ 是紧算子. 另一方面, 由(6.5) 及增长性条件

(6.7) 推得：存在一个仅依赖于$R = R(\delta) > 0$ 的函数$c \in L^2(0,\pi)$, 使

$$|g(x,u)| \le (\Gamma(x) + \frac{\delta}{2})|u| + b(x) + c(x)$$

对a.e. $x \in (0,\pi)$ 及$\forall u \in I\!R$ 成立. 因此序列$\{\frac{g(x,u_n)}{|u_n|_{C^1}}\}$ 在$L^2(0,\pi)$ 有界. 故(6.27) 的右端在$L^2(0,\pi)$ 中有一个不依赖于n 的界. 现将(6.27) 改写成等价形式

$$v_n = E^{-1}[\lambda_n \frac{h}{|u_n|_{C^1}} + \lambda_n q v_n - \lambda_n \frac{g(x,u_n)}{|u_n|_{C^1}}]. \qquad (6.28)$$

再利用$E^{-1} : L^2(0,\pi) \to C^1[0,\pi]$ 的紧性，我们不妨假设$\{v_n\}$ 在$C^1[0,\pi]$ 中收敛于$v \in C^1[0,\pi]$. v 满足$|v|_{C^1} = 1$ 及$v(0) = v(\pi) = 0$.

现在，利用(6.22) 或(6.23), 可推知$\widetilde{v}_n \to 0$ 于$H^1(0,\pi)(n \to \infty)$. 由此可知：$v \in \overline{H}_0^1(0,\pi)$, 即存在$A \in I\!R$, 使$v(x) = A\sin x$. 因$|v|_{C^1} = 1$, 故$v(x) = \pm\frac{1}{2}\sin x$. 在后面的讨论中，总假定$v(x) = \frac{1}{2}\sin x$.($v(x) = -\frac{1}{2}\sin x$ 的情形同理可证).

现在利用$v_n(0) = v_n(\pi) = 0$, $v_0 \to v$ 于$C^1[0,\pi], v(x) = \frac{1}{2}\ \sin x$, $v'_n(0) \to \frac{1}{2}$ 及$v'_n(\pi) \to -\frac{1}{2}\,(n \to \infty)$ 的事实，可推知：存在$n_0 \in I\!N$ 使$\forall n : n \ge n_0, v_n(x) > 0$ 于$(0,\pi)$. 由此，当$n \ge n_0$ 时

$$u_n(x) > 0 \text{ 于 } (0,\pi), \qquad u_n(0) = u_n(\pi) = 0. \qquad (6.29)$$

将v_n 分解成$v_n = \overline{v}_n + \widetilde{v}_n$, 则$\overline{v}_n = k_n \sin x, k_n \to \frac{1}{2}(n \to \infty)$. 给(6.26) 两边同乘以$\overline{v}_n$, 然后从0 积到$\pi$, 并注意到$\lambda_n \in (0,1)$ 及题设$\int_0^\pi h\sin x\,dx = 0$, 可知

$$\frac{\lambda_n}{|u_n|_{C^1}} \int_0^\pi g(x,u_n(x))\overline{v}_n(x)dx < 0 \qquad (6.30)$$

对充分大的n 均成立，故$\int_0^\pi g(x,u_n(x))\sin x dx < 0$. 这与(6.29) 及符号条件(6.6) 矛盾！ ∎

下面例举说明定理3.6.1 确可解决一些非线性项渐近非一致增长，且不满足Landesman-Lazer 条件方程(6.3) 的可解性问题.

例 1 设$g_0 : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_0(x,u) = \Gamma(x) u \sin^2 u,$$

其中

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 3 & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases} \tag{6.31}$$

则显然Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} & u'' + u + g_0(x,u) = \cos x \\ & u(0) = u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

满足定理3.6.1 的全部条件.

但g_0 无界且渐近非一致增长，且由于$\limsup\limits_{u\to-\infty} g_0(x,u) = 0 = \liminf\limits_{u\to+\infty} g_0(x,u)$, 故Landesman-Lazer 条件不满足.

3.6.2 广义符号条件下的 Neumann 问题

运用与3.6.1 中的论证过程完全类似的讨论，我们可以建立如下结果

定理 3.6.2 设g 满足对$L^2(0,\pi)$ 的Carathéodory 条件及广义符号条件

$$g(x,u)u \geq 0 \qquad \text{a.e. } x \in (0,\pi) \text{ 及 } |u| \geq r_0 > 0. \tag{6.32}$$

进一步，假设$\Gamma \in L^\infty(0,\pi)$ 满足(6.7) 并且

$$0 \leq \Gamma(x) \leq 1 \qquad \text{a.e. } x \in (0,\pi)$$

及

$$\text{meas}\{x \in (0,\pi) \mid \Gamma(x) < 1\} > 0.$$

则对任意$h \in \{w \in L^2(0,\pi) \mid \int_0^\pi w(x)dx = 0\}$, Neumann 边值问题 (6.4) 至少有一个解.

3.6.3 广义符号条件下的 Dirichlet 问题

能否将定理3.6.1 中的符号条件

$$ug(x,u) \geq 0 \qquad \text{a.e } x \in (0,\pi) \text{ 及 } \forall u \in \mathbb{R} \tag{6.6}$$

减弱为广义符号条件

$$ug(x,u) \geq 0, \qquad \text{a.e.} \quad x \in (0,\pi) \text{ 及 } |u| \geq r_0 > 0, \tag{6.32}$$

答案是否定的. 下面给出一个反例.

例 2 取$h = \cos x$

$$g(x,u) = g_1(u) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,+\infty) \\ x+2 & x \in (-2,-1) \\ 0 & x \in (-\infty,-2]. \end{cases}$$

虽然$ug_1(u) \geq 0$ 对$\forall u : |u| \geq 1$ 成立, 又$\int_0^\pi \cos x \sin x dx = 0$, 但 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &u'' + u + g_1(u) = h \\ &u(0) = u(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

无解. 事实上, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 都有$\int_0^\pi g_1(\alpha \sin x)\sin x dx > 0$. 据定理 3.4.5, (6.33) 无解. ∎

马如云[102] 在广义符号条件成立的前提下, 通过对g 附加条件, 研究Dirichlet 问题(6.3) 的可解性, 得到如下结果.

定理 3.6.3[102]　设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足对$L^2(0,\pi)$ 的Carathe-odory 条件. 进一步，假设

(i) $ug(x,u)\geq 0,\ |u|\geq r_0$ a.e. $x\in(0,\pi)$ (6.34)

其中$r_0>0$ 为常数.

(ii) 任意$\sigma>0$, 存在$R=R(\sigma)>0$ 及函数$b=b_\sigma\in L^\infty(0,\pi)$, 使

$$|g(x,u)|\leq(\Gamma(x)+\sigma)|u|+b(x)$$

对$|u|\geq R$ 及a.e. $x\in(0,\pi)$ 成立. 其中$\Gamma\in L^\infty(0,\pi)$ 满足$0\leq\Gamma(x)\leq 3$ 且

$$\text{meas}\{x\in(0,\pi)\mid\Gamma(x)<3\}>0. \tag{6.35}$$

(iii) 存在常数$\rho>0$, 使

$$\int_0^\pi g(x,u_-)\sin x\,dx\leq\int_0^\pi h\sin x dx\leq\int_0^\pi g(x,u_+)\sin x\,dx, \tag{6.36}$$

其中$h\in L^\infty$

$$u_+\in\left\{u\in C^1[0,\pi]\mid u(0)=u(\pi)=0,\ u\geq\rho\sin x\right\}$$
$$u_-\in\left\{u\in C^1[0,\pi]\mid u(0)=u(\pi)=0,\ u\leq-\rho\sin x\right\},$$

则Dirichlet 问题(6.3) 至少有一个解.

证明　沿用定理3.6.1 的方法和记号. 在广义符号条件(6.34) 成立的条件下，只需对定理3.6.1 证明稍加改动，就能得到原(6.23) 式. 即

$$|\widetilde{u}|_{H^1}\leq\alpha+(\alpha^2+2\alpha|\overline{u}|_{H^1})^{\frac{1}{2}}. \tag{6.37}$$

下证存在一个常数$M>0$ (M 不依赖于λ 或u), 使问题

$$\begin{aligned}&u''+u+(1-\lambda)qu+\lambda\widetilde{\nu}(x,u)u+\lambda g(x,u)=\lambda h,\\&u(0)=u(\pi)=0,\end{aligned} \tag{6.38}$$

当$\lambda \in (0,1)$ 时的所有可能解u 满足

$$|u|_{C^1} \leq M. \tag{6.39}$$

反设不然，则存在$\{\lambda_n\} \subset (0,1), \{u_n\} \subset H^2_\pi(0,\pi)|u_n|_{C'} \geq n$, 使

$$\begin{aligned} u''_n + u_n + (1-\lambda_n)qu_n + \lambda_n g(x,u_n) =& \lambda_n h, \\ u_n(0) = u_n(\pi) =& 0. \end{aligned} \tag{6.40}$$

令$v_n = \frac{u_n}{|u_n|_{c^1}}$. 与定理3.6.1 的证法完全类似，我们有$v_n$ 在$C^1[0,\pi]$ 范数下收敛于$\pm\frac{1}{2}\sin x$.

不妨设$v_n \xrightarrow{|\cdot|_{C^1}} \frac{1}{2}\sin x$, ($v_n \xrightarrow{|\cdot|_{C'}} -\frac{1}{2}\sin x$ 的情形同理可证). 利用$v_n(0) = v_n(\pi) = 0$ 及$v_n \xrightarrow{|\cdot|_{C^1}} \frac{1}{2}\sin x$ 可推知：存在自然数N, 使当$n > N$ 时，有

$$v_n \geq \frac{1}{6}\sin x \quad x \in (0,\pi). \tag{6.41}$$

事实上，当$x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ 时，因$v_n \xrightarrow{|\cdot|_{C^1}} \frac{1}{2}\sin x$, 故存在不依赖于$x$ 的$N_1 > 0$, 使$\forall n > N_1$, 有

$$v_n \geq \frac{1}{6}\sin x$$

对$x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ 一致成立. 当$x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时因$v'_n \xrightarrow{|\cdot|_C} \frac{1}{2}\cos x$, 故存在不依赖于$x$ 的$N_2 > 0$, 使当$n > N_2$ 时

$$\left(v_n - \frac{1}{6}\sin x\right)' = v'_n - \frac{1}{6}\cos x \geq 0 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

从而，$v_n(x) - \frac{1}{6}\sin x \geq v_n(0) - \dfrac{1}{6}\sin 0 = 0$. 即

$$v_n(x) \geq \frac{1}{6}\sin x$$

对$x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 一致成立. 当$x \in [\frac{5\pi}{3}, \pi]$ 时，亦因$v'_n \xrightarrow{|\cdot|_C} \frac{1}{2}\cos x$. 估存在不依赖于$x$ 的$N_3 > 0$, 使当$n > N_3$ 时，有

$$\left(v_n - \frac{1}{6}\sin x\right)' = v'_n(x) - \frac{1}{6}\cos x \leq 0.$$

从而$v_n(x)-\frac{1}{6}\sin x\ge v_n(\pi)-\frac{1}{6}\sin\pi=0$, 即

$$v_n(x)\ge\frac{1}{6}\sin x$$

对$x\in[\frac{5\pi}{3},\pi]$一致成立. 现取$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 综合上述, 当$n>N$时, (6.41) 成立.

现在选取$\overline{n}=\max\{[6\rho]+6,N+1\}$. 其中$[6\rho]$表示$6\rho$的整数部分. 则

$$u_{\overline{n}}(x)\ge\frac{1}{6}|u_{\overline{n}}(x)|_{C'}\sin x.$$

因$|u_{\overline{n}}|_{c'}\ge\overline{n}$, 故$u_{\overline{n}}\ge\rho\sin x$. 利用(6.36) 的后半不等式: 可知

$$\int_0^\pi h\sin xdx\le\int_0^\pi g(x,u_{\overline{n}})\sin x\,dx. \tag{6.42}$$

另一方面, 给$n=\overline{n}$的(6.40) 两边同乘以$\sin x$, 然后从0 积到π, 得

$$(1-\lambda_{\overline{n}})q\int_0^\pi u_{\overline{n}}\sin xdx+\lambda_{\overline{n}}\int_0^\pi g(x,u_{\overline{n}})\sin xdx=\lambda_{\overline{n}}\int_0^\pi h\sin x\,dx.$$

因$u_{\overline{n}}\ge\rho\sin x>0$于$(0,\pi)$. 又$\lambda_{\overline{n}}\in(0,1)$, 故

$$\int_0^\pi g(x,u_{\overline{n}})\sin xdx<\int_0^\pi h\sin x\,dx, \tag{6.43}$$

这便与(6.42) 矛盾! ∎

定理 3.6.3 确可解决一些不满足Landesman-Lazer 条件, 不满足符号条件的问题的可解性. 如

例 3 取

$$g_2(u)=\begin{cases}3u-4 & u>1\\ -u & 0\le u\le 1\\ 0 & u<0,\end{cases}$$

$h=\cos x$, 则不难验证定理3.6.3 的全部条件均满足(ρ 取为10). 故 Dirichlet 问题

$$u''+u+g_2(u)=\cos x,$$
$$u(0)=u(\pi)=0$$

至少有一个解.

§ 3.7 Duffing 方程 • 跨有限个特征值 • Poincaré-Birkhoff 定理

近十年来, 对跨多个特征值扰动问题可解性及多解的存在性的问题已作了相当多的研究, 有关材料请参见Lazer 和Mackann 的评述性文章[96]. 本节将证明关于Duffing 方程周期边值问题存在多解的某些结果. 所使用的方法是Poincaré-Birkhoff 环域定理.

本节结果选自[92] 和[8].

3.7.1 结论

先考虑常微分方程

$$u''+g(u)=s(1+h(t)), \tag{7.1}$$

其中$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个C^1 函数, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以2π 为周期的连续函数. 而s 是一个参数.

在陈述关于问题(7.1) 的2π 周期解的个数下界的结果之前, 先介绍一些记号.

设$C(2\pi)=\{r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid r$ 连续且以2π 为周期$\}$. $C(2\pi)$ 的范数 $\|r\|_c=\sup_{t\in[0,2\pi]}|r(t)|$. 设$C^1[0,2\pi]=\{v:[0,2\pi]\to\mathbb{R}\mid v\in C^1\}$, 而$C^1[0,2\pi]$ 的范数

$$\|v\|_{C^1}=\sup_{t\in[0,\ 2\pi]}|v(t)|+\sup_{t\in[0,\ 2\pi]}|v'(t)|.$$

定理 3.7.1[92] 假设存在非负整数n, 使

$$\lim_{t\to-\infty} g(t)=+\infty \quad 而\ 0\le n^2<\lim_{t\to+\infty} g'(t)<(n+1)^2, \tag{7.2}$$

则存在实数$h_0: 0<h_0<1$ 及实数$s_0=s_0(h_0): s_0>0$ 使对所有$s\ge s_0$ 及任意满足$\|h\|_c\le h_0<1$ 的$h\in C(2\pi)$, 问题(7.1) 至少有$2n+2$ 个2π 周期解.

定理 3.7.2 假设存在正整数k 和n, 使

$$(k-1)^2<\alpha\triangleq\lim_{t\to-\infty} g'(t)<k^2\le n^2<\beta\triangleq\lim_{t\to+\infty} g'(t)<(n+1)^2, \tag{7.3}$$

其中α 和β 满足$\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ 不是整数. 设$l=[\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}]$, 即$l$ 为$\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ 的整数部分. 则存在实数$h_0: 0<h_0<1$ 及实数$s_0=s_0(h_0): s_0>0$ 使对任何满足$\|h\|_c<h_0<1$ 的$h\in C(2\pi)$ 有

(i) 当$s\ge s_0$ 时, (7.1) 至少有$2(n-l)+1$ 个2π 周期解;

(ii) 当$s\le -s_0$ 时, (7.1) 至少有$2(l-k+1)+1$ 个2π 周期解.

下面再介绍丁伟岳[8] 中建立的关于方程

$$u''+g(u)=p(t) \tag{7.4}$$

有无穷多个w 周期解的结果, 其中$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 而$p(t+w)=p(t)$.

定理 3.7.3 如果方程(7.4) 对于初值问题解是唯一的, 并且

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{g(u)}{u}=+\infty, \tag{7.5}$$

那么(7.4) 具有无穷多个w 周期解.

注 (7.5) 表明, 定理3.7.3 中的g 超线性增长. 此时, g 已跨越了无穷多个特征值.

限于篇幅，下面只给出定理3.7.1 的证明. 其余两个定理的证明，就Poincaré-Birkhoff 环域定理的运用过程而言，与定理3.7.1 的颇为相似，我们将它们略去.

3.7.2 预备引理

为了给出定理3.7.1 的证明，先给出几个引理.

我们首先证明对充分大的正的s 及任何满足条件$\|h\|_c \leq h_0 < 1$ (h_0 的定义见后边) 的$h \in C(2\pi)$, 在假设(7.2) 下，问题(7.1) 有两个周期解，其中一个严格正而另一个严格负.

引理 1 假设(7.2) 成立，且(7.1) 中的h 满足$\|h\|_c < 1$. 则存在一个$s_1 > 0$, 使对$\forall s > s_1$, (7.1) 有一个严格负的2π 周期解.

证明 将(7.1) 改写成

$$u'' + g(u) - s(1 + h(t)) = 0. \tag{7.6}$$

因当$|u| \to \infty$, $g(u) \to +\infty$, 故存在$s_1 \in I\!R$, $s_1 > 0$ 及常数$\underline{u}_s < \overline{u}_s < 0$, 使

$$g(\overline{u}_s) - s(1 + h(t)) < 0 < g(\underline{u}_s) - s(1 + h(t)) \tag{7.7}$$

对$\forall s \geq s_1$ 及$\forall t \in I\!R$ 成立. 由此，$\overline{u}_s$ 和$\underline{u}_s$ 分别为(7.1) 的上下解. 众所周知：存在(7.1) 的2π 周期解$\widetilde{u}_s(t)$, 使

$$\underline{u}_s \leq \widetilde{u}_s(t) \leq \overline{u}_s < 0 \tag{7.8}$$

对$\forall t \in I\!R$ 成立. ∎

记$\widetilde{\beta} = \lim_{t\to\infty} g'(t)$. $\forall w \in C(2\pi)$, 记$R(w)$ 为

$$u'' + \widetilde{\beta} u = -w \tag{7.9}$$

唯一的2π 周期解. 则$R: C(2\pi) \to C(2\pi)$ 是一个有界线性算子. 由于$R(-1) = \frac{1}{\widetilde{\beta}}$, 故$\widetilde{\beta}\|R\| \geq 1$.

设z 为方程

$$u'' + \widetilde{\beta} u = 1 + h(t) \tag{7.10}$$

的唯一解. 即$z = R(-(1+h))$. 再设h_0 是一个满足$0 < h_0 < \frac{1}{\widetilde{\beta}\|R\|}$的实数. 由(7.10) 我们立即得到如下结果.

命题 1 如果(7.10) 中的h 满足$\|h\|_c \leq h_0$, 则

$$z(t) \geq \frac{1}{\widetilde{\beta}} - \|R\| \cdot \|h\|_c \geq \frac{1}{\widetilde{\beta}} - \|R\| \cdot h_0 > 0. \tag{7.11}$$

引理 2 假设(7.1) 中的h 满足$\|h\|_c \leq h_0$. 再设$\delta_0 = \frac{1}{\widetilde{\beta}} - h_0\|R\|$. 则对$\forall \delta : 0 < \delta < \delta_0$, 存在一个数$s_0 = s_0(h_0)$, 当$\forall s \geq s_0$, (7.1) 有一个严格正的$2\pi$ 周期解$u_s(t)$, 使得

$$\|u_s - sz\|_c \leq s\delta. \tag{7.12}$$

证明　显然寻找(7.1) 的2π 周期解等价于寻找

$$u = R\big(f(u) - s(1+h)\big) \tag{7.13}$$

的不动点. 其中$f(u) = g(u) - \widetilde{\beta} u$. 令$v = \frac{u}{s}$ 并利用R 的线性性及$R(-(1+h)) = z$ 的事实可推知：求$u = R(f(u) - s(1+h))$ 的不动点等价于求解

$$v = \Psi_s(v), \tag{7.14}$$

其中

$$\Psi_s(v) \triangleq R(\frac{f(sv)}{s}) + z. \tag{7.15}$$

其次, 设δ 为满足$0 < \delta < \delta_0$ 的固定实数. 于是, $\forall v \in \overline{B(z,\delta)}$, 均有$v(t) > 0, \forall t$. 取$z_0 \in I\!R^+$, 使对$\forall t \geq z_0$, 有

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{3\|R\|}. \tag{7.16}$$

定义$s_2 > s_1 : s_2 = \frac{z_0}{\delta_0 - \delta}$. 则由(7.15) 和(7.16) 不难看出：$\forall s \geq s_2$ 及$\forall v, w \in \overline{B(z,\delta)}$, 有

$$\|\Psi_s(v) - \Psi_s(w)\|_c \leq \frac{1}{3}\|v - w\|_c. \tag{7.17}$$

由此，Ψ_s 是压缩映象. 下证对充分大的s, Ψ_s 将$\overline{B(z,\delta)}$ 映入$\overline{B(z,\delta)}$. 事实上，只要取$s_0 \geq s_2$ 使$|\frac{f(s(z(t)))}{s}| \leq \frac{2\delta}{3}\|R\|$ 对$\forall s \geq s_0$ 及$\forall t \in \mathbb{R}$ 成立；又由(7.15) 推知

$$\|\Psi_s(v) - z\|_c \leq \|R\| \cdot \left\|\frac{f(sv)}{s}\right\|_c. \tag{7.18}$$

结合

$$f(sv(t)) = f(sz(t)) + \int_0^1 f'(s(\tau v(t)) + (1-\tau)z(t))s(v(t) - z(t))d\tau, \tag{7.19}$$

我们得到

$$\|\frac{f(sv)}{s}\| \leq \frac{2\delta}{3\|R\|} + \frac{\|v - z\|_c}{3\|R\|} \leq \frac{\delta}{\|R\|}. \tag{7.20}$$

从(7.18) 和(7.20) 推知

$$\|\varphi_s(v) - z\|_c \leq \delta. \tag{7.21}$$

由压缩映象原理及(7.17) 和(7.21) 表明：存在唯一的$v_s \in \overline{B(z,\delta)}, s \geq s_0$, 使

$$v_s = \Psi_s(v_s). \tag{7.22}$$

最后，令

$$u_s = sv_s, \tag{7.23}$$

则u_s 便为(7.1) 的正2π 周期解.

下证(7.12) 式成立. 事实上，只需给(7.21) 两边同乘以s, 再利用(7.22) 和(7.23) 便可推得. ∎

借助于引理2 中存在的u_s, 可将(7.1) 转化为另一个等价方程. 取$\varepsilon^* > 0$, 使

$$n^2 < \widetilde{\beta} - \varepsilon^* < (n+1)^2. \tag{7.24}$$

如果必要，增大s_0, 使当$s \geq s_0$ 时

$$\|g'(u_s) - \widetilde{\beta}\|_c = \|f'(u_s)\|_c \leq \varepsilon^*. \tag{7.25}$$

设u 为(7.1) 的任一2π 周期解，

$$v(t) = u(t) - u_s(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{7.26}$$

则v 是

$$x'' + F(t,x) = 0 \tag{7.27}$$

的一个2π 周期解. 其中

$$F(t,x) = g(u_s(t) + x) - g(u_s(t)). \tag{7.28}$$

易见$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是C^1 函数并且对t 是以2π 为周期的. 进一步，F 满足

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(t,x)}{x} = g'(u_s(t)) \geq \widetilde{\beta} - \varepsilon^* > n^2 \tag{7.29}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(t,x)}{x} = \widetilde{\beta} \tag{7.30}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(t,x) = +\infty \tag{7.31}$$

且对$t \in \mathbb{R}$ 一致成立. 显然$x = 0$ 是(7.27) 的平凡2π 周期解. 此外(2.30) 和(2.31) 蕴涵了如下事实：存在$x_0 > 0$ 及$M > 0$, 使

$$F(t,x) > 0 \tag{7.32}$$

对$\forall t \in \mathbb{R}$ 及$x \in (-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$ 成立，且

$$F(t, x) > -M \tag{7.33}$$

对$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$ 成立.

为了将(7.27) 进一步转化为可以运用Poincare-Birkhoff 定理的形式. 我们需要如下引理.

引理 3 (7.27) 的所有2π 周期解有一个先验界.

证明 设v 是(7.27) 的一个2π 周期解. 并设v 在$t = t_m$ 处达到最小值. 则由(7.27) 推知

$$F(t_m, v(t_m)) \leq 0. \tag{7.34}$$

从(7.32) 知，$v(t_m) \in [-x_0, x_0]$. 在(7.27) 中以v 替换x, 再从t_m 积分到$t \in [t_m, t_m + 2\pi]$ 并利用(7.33), 可得

$$v'(t) = -\int_{t_m}^{t} F(r, v(r))dr \leq M(t - t_m). \tag{7.35}$$

再在(7.35) 两端从t_m 到$t \in [t_m, t_m + 2\pi]$, 得

$$v(t) \leq v(t_m) + \frac{M}{2}(t - t_m)^2 \leq x_0 + 2\pi^2 M. \tag{7.36}$$

由此可知

$$-x_0 \leq v(t) \leq x_0 + 2\pi^2 M, \tag{7.37}$$

由v 的任意性，引理得证. ∎

现设$x_1 \in \mathbb{R} : x_1 \geq x_0 + 2\pi^2 M$. 定义$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$G(t, x) = \begin{cases} F(t, x) & (t, x) \in \mathbb{R} \times (-x_1, x_1) \\ F(t, -x_1) & (t, x) \in \mathbb{R} \times (-\infty, -x_1] \\ F(t, x_1) & (t, x) \in \mathbb{R} \times [x_1, +\infty), \end{cases} \tag{7.38}$$

则G 是连续函数，并且G 对t 以2π 为周期，关于x 局部Lipschitz 连续. 易见，方程

$$v'' + G(t, v) = 0 \tag{7.39}$$

与(7.27) 有相同的2π 周期解.

命题 2 设G 由(7.38) 给出. 则(7.39) 对初值问题的每各解均在整个t 轴上有定义；进一步，如果v 是(7.39) 的非平凡解，则$v^2(t) + v'^2(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

3.7.3 定理 3.7.1 的证明

由3.7.2 的讨论我们知道：寻找(7.1) 的不同于$\widetilde{u}_s$ 与u_s 的2π 周期解等价于寻找(7.39) 的不同于$\widetilde{u}_s - u_s$ 的非平凡解(注意，$\widetilde{u}_s - u_s < 0, \forall t \in \mathbb{R}$.) 为了得到这些非平凡解，我们将利用丁伟岳推广的Poincare-Birkhoff 定理.

现在将(7.39) 改写成

$$v' = z, \tag{7.40}$$

$$z' = -G(t, v). \tag{7.41}$$

对任意 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, 以 $(v(t, a, b),\ z(t, a, b))$ 表示 (7.40)–(7.41) 以 $(v(0, a, b),\ z(0, a, b)) = (a, b)$ 为初值的解. 定义 (7.40)–(7.41) 的 Poincaré 映象 $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为

$$P(a, b) = (v(2\pi, a, b), z(2\pi, a, b)), \tag{7.42}$$

则P 是一个保面积同胚，且在我们的情形下，有$P(0,0) = (0,0)$. 作变换

$$v(t) = R(t)\cos\varphi(t), \qquad z(t) = R(t)\sin\varphi(t),$$

我们得到等价的极坐标系统

$$R' = -G(t, R\cos\varphi)\sin\varphi + R\sin\varphi\cos\varphi, \tag{7.43}$$

$$\varphi' = -\frac{G(t, R\cos\varphi)}{R}\cos\varphi - \sin^2\varphi. \tag{7.44}$$

设$H=\{(r,\theta)\mid r>0,\theta\in\mathbb{R}\}$. 设$T;H\to H$

$$T(r,\theta)=\{R(2\pi,r,\theta),\varphi(2\pi,r,\theta)\},\tag{7.45}$$

其中$(R(t,r,\theta),\varphi(t,r,\theta))$ 表示(7.43)-(7.44) 的满足

$$(R(0,r,\theta),\varphi(0,r,\theta))=(r,\theta)$$

的解. 我们知道$T:H\to H$ 是保面积同胚且

$$T(r,\theta+2\pi)=T(r,\theta)+(0,\ 2\pi),\tag{7.46}$$

其次设j 是任意整数，定义$T_j;H\to H$

$$T_j(r,\theta)=T(r,\theta)+(0,2\pi j).\tag{7.47}$$

显然，对任意$j\in\mathbb{Z},T_j$ 均为保面积同胚并且

$$T_j(r,\theta+2\pi)=T_j(r,\theta)+(0,2\pi).\tag{7.48}$$

现在，我们可以证明如下两个命题.

命题 3 存在$\mu_0>0$, 使对$\forall\mu:0<\mu\le\mu_0$ (7.43)-(7.44) 的解$(R(t,\mu,\theta),\varphi(t,\mu,\theta))$ 在$t=2\pi$ 满足

$$\theta-\varphi(2\pi,\mu,\theta)>2\pi n\qquad\forall\theta\in\mathbb{R}.\tag{7.49}$$

证明 设$(\mu,\theta)\in H$, 记$(v(t,a,b),\ z(t,a,b))$ 为(7.40)-(7.41) 的满足$a=\mu\cos\theta,\ b=\mu\sin\theta$ 的解. 注意$(v(t,0,0),\ z(t,0,0))=(0,0),\ \forall t\in\mathbb{R}$. 据解对初值的连续依赖性可知；对给定的$\varepsilon_1>0$, 存在$\mu_0>0$, 当$\mu:0<\mu\le\mu_0$ 时，便有$\max_{t\in[0,2\pi]}|v(t,a,b)|<\varepsilon_1$. 定义$\widetilde{\alpha}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\widetilde{\alpha}(t)=\begin{cases}\dfrac{-G(t,v(t,a,b))}{v(t,a,b)} & \text{当 } v(t,a,b)\ne 0\\ g'(u_s(t)) & \text{当 } v(t,a,b)=0,\end{cases}$$

则由(7.29) 知，$\widetilde{\alpha}$ 连续. 显见，$v(t,a,b)$ 是线性方程

$$v''+\widetilde{\alpha}(t)v=0 \qquad \forall t\in[0,2\pi] \tag{7.50}$$

的一个解. 取ε_1 充分小，由(7.29) 便可推知

$$\widetilde{\alpha}(t)>n^2, \qquad \forall t\in[0,2\pi], \tag{7.51}$$

据Sturm 第一比较定理，(7.49) 成立. ∎

命题 4 存在一个数$\Delta_0>\mu_0$, 使对任意$\Delta\geq\Delta_0$ (7.43)-(7.44) 的解$(R(t,\Delta,\theta),\varphi(t,\Delta,\theta))$ 在$t=2\pi$ 满足

$$\theta-\varphi(2\pi,\Delta,\theta)<2\pi \qquad \forall\theta\in\mathbb{R}. \tag{7.52}$$

证明 反设这样的Δ_0 不存在，则存在序列$(\Delta_k,\psi_k)_{k=1}^{\infty}:\Delta_k\to\infty(k\to\infty)$, 使得$v_k\triangleq v(t,a_k,b_k)$ 在$[0,2\pi]$ 中至少有两个零点. 这里$a_k=\Delta_k\cos\psi_k$，$b_k=\Delta_k\sin\psi_k$，$k\in\mathbb{N}$. 令$\widehat{v}_k(t)=\frac{v_k(t)}{\|v_k\|_{C^1}}$, $t\in[0,2\pi]$, 则$\|\widehat{v}_k\|_{c'}=1$, $\forall k$. 由于$v_k(t)$ 满足(7.39) (对$\forall k\in\mathbb{N}$, $t\in[0,2\pi]$), 故有

$$\widehat{v}_k(t)=\widehat{v}_k(0)+\widehat{v}'_k(0)t-\int_0^t\int_0^\tau\frac{G(\tau,v_k(\tau))}{\|v_k\|_{c'}}\,d\tau\,dt. \tag{7.53}$$

上式结合G 的有界性，再利用Ascoli-Arzela 定理可知：$\{\widehat{v}_k\}$ 中有一个在$C^1[0,2\pi]$ 中收敛的子列，不妨仍记为$\{\widehat{v}_k\}$. 即$\widehat{v}_k\xrightarrow{C^1}\widehat{v}$, $\|\widehat{v}\|_{c^1}=1$. 在(7.53) 两边让$k\to\infty$, 推得

$$\widehat{v}(t)=\widehat{v}(0)+\widehat{v}'(0)t. \tag{7.54}$$

但上式表明，当k 充分大时，$v_k(t)$ 在$[0,2\pi]$ 内至多有一个零点. 矛盾！ ∎

现在我们能够证明定理3.7.1.

定理3.7.1 的证明　只需证明(7.39) 具有$2n$ 个不同于$\widetilde{u}_s-u_s$ 的非平凡解. 为此考察保面积同胚$T_j, j\in \mathbb{Z}$ (参见(7.47)). 设

$$T_j(r,\theta)=\big(R_j(r,\theta),\varphi_j(r,\theta)\big), \tag{7.55}$$

$j\in \mathbb{Z}$. 从(7.45) 和(7.47) 推知$R_j(r,\theta)=R(r,\theta)$,

$$\varphi_j(r,\theta)=\varphi(2\pi,r,\theta)+2\pi j, \tag{7.56}$$

$j\in \mathbb{Z}$. 据命题3 和命题4, 我们有

$$\varphi_j(\mu,\theta)-\theta<2\pi(j-n) \tag{7.57}$$

及

$$\varphi_j(\Delta,\theta)-\theta>2\pi(j-1) \tag{7.58}$$

$\forall\, j\in \mathbb{Z}$, $\forall\, \mu\in(0,\mu_0]$, $\forall\, \Delta\in[\Delta_0,+\infty)$ 成立.

选取一个$\mu\in(0,\mu_0]$ 和一个$\Delta\in[\Delta_0,+\infty)$. 则对$j=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\varphi_j(\mu,\theta)-\theta<0 \qquad \varphi_j(\Delta,\theta)-\theta>0. \tag{7.59}$$

定义

$$H_{\Delta\mu}=\{(r,\theta)\mid \mu\le r\le\Delta,\theta\in \mathbb{R}\}.$$

则据丁伟岳推广的Poincare-Birkhoff 定理, $T_j: H_{\Delta\mu}\to H_{\Delta\mu}$ 有两个不同的不动点. 记这两个不动点为$(r_{ij},\theta_{ij}), i=1,2$. 进一步, 设$a_{ij}=r_{ij}\cos\theta_{ij}$, $b_{ij}=r_{ij}\sin\theta_{ij}$ $i=1,2$. 则对每一个$j=1,\cdots,n$, 点(a_{ij},b_{ij}) $i=1,2$ 为Poincare 映象P 的不动点. 于是$v(t,a_{ij},b_{ij})$ 便为(7.39) 的2π 周期解, 并且$v(t,a_{ij},b_{ij})$ 在$[0,2\pi)$ 中有且仅有$2j$ 个零点. 故(7.39) 至少有$2n$ 个不同于$\widetilde{u}_s-u_s$ 的非平凡2π 周期解.

▮

附注 III

1. Ahmad [99], Arias [100] 讨论非自伴边值共振问题的解的存在性. 该问题中的线性微分算子不再是自伴算子. [99] 和[100] 中的结果分别与[80] 和[84] 中的结果有些相似. 目前, 对非自伴边值问题的研究工作还很少见.

2 Mawhin, Ward 和Willen [73] 利用共轭变分法在渐近非一致条件下, 获得一类两点边值问题存在解的充要条件.

第四章 强共振和带周期非线性项的共振

本章主要讨论椭圆边值问题(包括常微分方程两点边值问题)当非线性项满足强共振条件或为周期函数时的可解性和非平凡解的存在性. 我们也顺便讨论波方程周期Dirichlet 问题在强共振条件下的可解性. 所凭借的主要方法是变分方法和解集连通技巧. 由于本章方程所对应的泛函一般不满足[P.S.] 条件, 故给问题的讨论带来了一定的困难.

本章仅介绍该方向的几个重要结果和研究的基本方法. 想进一步学习的读者, 请参阅第四章参考文献.

§ 4.1 共振问题的分类

设$\Omega \subset I\!R^n$ 是一个有正则边界$\partial\Omega$ 的有界开区域. 记$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ 为线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= 0 \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

的相互区别的特征值. 设$P : \Omega \times I\!R \to I\!R$ 满足Caratheodory 条件. 对于Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} -\Delta u &= p(x, u) \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

考察如下两个问题.

问题 1 (1.2) 有没有解?

问题 2 如果$p(x,0)=0$, 则(1.2) 是否有非平凡解？

在第二章和第三章中，我们曾部分的讨论过上述问题，并且我们已经知道，为了回答问题1 和问题2, 需要更多的关于p 的信息；换句话说，(1.2) 的性质主要依赖于当$|t|\to\infty$ 时$p(x,t)$ 的渐近行为.

本节引进在无穷共振及非线性项渐近线性等概念，然后对共振问题给予分类.

定义 1[104] 如果存在(1.1) 的某特征值λ_l, 使

$$\liminf_{|t|\to\infty}\frac{p(x,t)-\lambda_l t}{t}\le 0\le\limsup_{|t|\to\infty}\frac{p(x,t)-\lambda_l t}{t},\tag{1.3}$$

则称(1.2) 在无穷共振，并且称λ_l 为(1.2) 的共振点.

此时，若记$\widehat{g}(x,t)=p(x,t)-\lambda_l t$, 则(1.2) 可等价地写成

$$\begin{aligned}-\Delta u-\lambda_l u=&\widehat{g}(x,u)\qquad x\in\Omega,\\ u=&0\qquad\qquad x\in\partial\Omega.\end{aligned}\tag{1.4}$$

例 1 若在(1.4) 中，$\widehat{g}(x,u)$ 为连续的有界函数，则(1.4) 在无穷共振.

例 2 设$h\in L^2(\Omega), g_0(u)=u$. 考察二阶常微分方程

$$\begin{aligned}-u''-u-g_0(u)=&h(x),\\ u(0)=u(\pi)=&0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

由于$\widehat{g}(x,u)=g_0(u)+h(x)$, 而

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{g_0(u)+h}{u}=\liminf_{|u|\to\infty}\frac{g_0(u)+h}{u}=1$$

不满足(1.3), 故(1.5) 不在无穷共振.

定义 2 如果存在$\alpha(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, 使

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{p(x,t)}{t} = \alpha(x), \tag{1.6}$$

则称问题(1.2) 的非线性项p 渐近线性.

如果p 渐近线性. 记

$$g(x,t) = p(x,t) - \alpha(x)t, \tag{1.7}$$

则$\lim_{|t|\to\infty} \frac{g(x,t)}{t} = 0$ 对$x \in \Omega$ 一致成立.

命题 1 若$p: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 渐近线性且

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{p(x,t)}{t} = \lambda_l \qquad \text{a.e. 于} \quad \Omega \text{ 中}, \tag{1.8}$$

其中λ_l 为(1.1) 的某特征值. 则问题(1.2) 在无穷共振.

现在回到问题(1.4). 根据$\widehat{g}$ 在∞ 增长程度的不同, 我们可以将共振问题分成如下六类(见[104])

(i) $\limsup_{|t|\to\infty} |\frac{\widehat{g}(x,t)}{t}|$ 无界;

(ii)$\limsup_{|t|\to\infty} |\frac{\widehat{g}(x,t)}{t}|$ a.e. 有界;

(iii) $\lim_{|t|\to\infty} \frac{\widehat{g}(x,t)}{t} = 0$ 但$\limsup_{|t|\to\infty} |\widehat{g}(x,t)|$ 无界;

(iv)$\lim_{|t|\to\infty} \frac{\widehat{g}(x,t)}{t} = 0$ 但$\limsup_{|t|\to\infty} |\widehat{g}(x,t)|$ a.e. 有界;

(v) $\lim_{|t|\to\infty} \widehat{g}(x,t) = 0$ 但$\limsup_{|t|\to\infty} |G(x,t)|$ 无界;

(vi) $\lim_{|t|\to\infty} \widehat{g}(x,t) = 0$ 但$\limsup_{|t|\to\infty} |G(x,t)|$ a.e. 有界;

其中$G(x,t) = \int_0^t \widehat{g}(x,s)ds$.

定义 3 若问题(1.4) 中的$\widehat{g}$ 属于(vi) 类, 则称(1.4) 强共振(strong resonance).

例 3 问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_l u = 0 \qquad & x \in \Omega \\ u = 0 \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.9}$$

为强共振.

在本节的最后我们指出：强共振问题所对应的泛函一般不满足[P.S.] 条件.

例 4 在例3 中线性问题(1.9) 所对应的泛函为$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_l |u|^2). \tag{1.10}$$

设φ 为λ_l 所对应的某个非零特征函数. 考察序列$\{k\varphi\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$. 虽然$\{k\varphi\}_{k=1}^\infty$ 满足

$$\begin{cases} I'(k\varphi) = 0 \\ I(k\varphi) = 0, \end{cases}$$

但$\{k\varphi\}_1^\infty$ 中显然没有收敛子列.

§ 4.2 椭圆方程 Dirichlet 问题 • 强共振 • C 条件及环绕理论

本节讨论半线性椭圆方程Dirichlet-0 边值强共振问题

$$-\Delta u - \lambda_k u + g(u) = 0 \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.1}$$

的可解性和非平凡解的存在性. 其中$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是C^1 函数，且满足条件

(g_1) 当$|t| \to +\infty, tg(t) \to 0$;

(g_2) 当$t \to +\infty, G(t) \to 0$. 其中$G(t) = \int_{-\infty}^t g(s)ds$,

(g_3) $G(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ω 是一个有光滑边界的有界开区域.

主要结果有如下两个(选自[31]).

定理 4.2.A 设(g_1), (g_2), (g_3) 成立，则(2.1) 至少有一个解.

定理 4.2.B 设g 满足(g_1), (g_2), (g_3) 并且$g(0)=0$. 进一步，设

$$g'(0)=\sup\{g'(t)\mid t\in I\!R\},$$

则(2.1) 至少有一个非平凡解.

4.2.1 C 条件及临界点定理

通过§4.1, 我们已经知道，在强共振情形下，通常的[P.S.] 条件一般不满足. 为了克服泛函“紧性的失缺”, 一般要采用比[P.S.] 条件更弱的紧性条件. 这对用变分方法研究强共振问题是基本的.

Partolo, Benci 和Fortunato [31] 提出一个比[P.S.] 条件弱的紧性条件— C 条件，并在C 条件下得到形变定理，进而建立了C 条件下的临界点定理. 下面对此作一介绍.

设X 是一个实Banach 空间，X' 为其共轭，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为X 与X' 间的共轭对. 从现在起，为了方便，我们用$\|\cdot\|$ 来记X 和X' 中的范数，其含义将依出现场合而定.

定义 泛函$f\in C^1(X,I\!R)$ 在$(c_1,c_2)(-\infty\le c_1\le c_2\le+\infty)$ 上满足C 条件是指：下列两条件同时成立,

(i) 若$\{u_n\}\subset f^{-1}((c_1,c_2))$ 及$\{f(u_n)\}$ 均有界且$f'(u_n)\to 0$, 则$\{u_n\}$ 中含有收敛子列.

(ii) $\forall c\in(c_1,c_2),\exists\sigma,R,\alpha>0$, 使$[c-\sigma,c+\sigma]\subset(c_1,c_2)$ 并且对$\forall u\in f^{-1}([c-\sigma,c+\sigma]),\|u\|\ge R$, 有$\|f'(u)\|\cdot\|u\|\ge\alpha$.

定理 4.2.1 设H 是一个Hilbert 空间，$f\in C^1(H,R)$ 满足下列条件

(f_1) f 在$(0,+\infty)$ 上满足C 条件;

(f_2) 存在H 的闭子集$S\subset H$ 及一个Hilbert 带边流形$Q\subset H$ (Q 的边界记为∂Q) 使得如下三个条件同时成立:

(i) 存在常数$\alpha,\beta:\beta>\alpha\ge 0$, 使$f(u)\le\alpha,\forall u\in\partial Q;f(u)\ge\beta$, $\forall u\in S$;

(ii) S 与∂Q 环绕(参看第一章);

(iii) $\sup_{u\in Q} f(u) < +\infty$;

则f 有一个临界值$c \geq \beta$.

注 定理4.2.0 及其他类型的临界点定理参见[31].

4.2.2 C 条件的验证

取$H = H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega), H$ 的范数为$\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

显然，(2.1) 的解是泛函

$$f(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \lambda_k |u|^2\right) + \int_\Omega G(u)\, dx \tag{2.2}$$

的临界点. 其中$|\cdot|$ 表示$L^2(\Omega)$ 的范数. 在$g \in C^1$ 同时满足(g_1), (g_2) 时，不难推得$f \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

为了运用定理4.2.1 去讨论问题(2.1), 本小节首先验证f 在$(0,\infty)$ 上满足C 条件.

先介绍一些记号和一个引理.

设$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$ 为线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u = 0 \qquad & x \in \Omega \\ u = 0 \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

的相互不同的特征值. $M_j (j = 1, 2, \cdots)$ 为$\lambda_j (j = 0, \cdots, k, \cdots)$ 所对应的特征子空间.

设m 是一个整数，我们记

$$H^-(m) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j\leq m} M_j & \text{当 } m \geq 0, \\ \{0\} & \text{当 } m < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$H^+(m) = \overline{M_m \oplus M_{m+1} \oplus \cdots}. \tag{2.5}$$

易见，$H^+(m) \cap H^-(m) = M_m$

设$\rho > 0$. 我们记

$$B_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| \le \rho\}. \tag{2.6}$$

引理 1 设V_k 是$C(\overline{\Omega})$ 的一个有限维子空间，V_k 满足

$$\forall v \in V_k\backslash\{0\} \Longrightarrow v \neq 0 \qquad \text{a.e.} \quad 于 \quad \Omega. \tag{2.7}$$

设$h \in L^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$h(t) \to 0, \qquad 当 \quad |t| \to \infty. \tag{2.8}$$

进一步，设K 是$L^p(\Omega)(p \ge 1)$ 的一个紧子集. 则

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_\Omega |h(tu(x) + v(x))| dx = 0 \tag{2.9}$$

对$v \in K$ 和$u \in S$ 一致成立. 其中

$$S = \{u \in V_k \mid |||u||| = 1\}, \quad 而 \ |||u||| \triangleq \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

证明　设$\varepsilon > 0$. 我们首先证明存在两个正常数$\delta(\varepsilon), M(\varepsilon)$, 使得

$$\forall u \in S, \quad \text{meas}\{x \in \Omega \mid |u(x)| < \delta(\varepsilon)\} < \varepsilon, \tag{2.10}$$

$$\forall v \in K, \quad \text{meas}\{x \in \Omega \mid |v(x)| > M(\varepsilon)\} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

先证(2.10). 为此我们证$\forall u \in S, \exists \delta(u,\varepsilon) > 0$, 使

$$(w \in V_k, |||w-u||| < \delta(u,\varepsilon)) \Longrightarrow (\text{meas}\{x \in \Omega \mid |w(x)| < \delta(u,\varepsilon)\} < \varepsilon). \tag{2.12}$$

反设不然，即存在$u_0 \in S$, 使$\forall n \in \mathbb{N}, \exists w_n \in V_k$, 使$|||w_n - u_0||| < \frac{1}{2n}$且

$$\text{meas}\left\{x \in \Omega \mid |w_n(x)| < \frac{1}{2n}\right\} \geq \varepsilon,$$

现记

$$\Omega_n = \left\{x \in \Omega \mid |w_n(x)| < \frac{1}{2n}\right\}.$$

显然我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Omega_n \subset \left\{x \in \Omega \big| |u_0(x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

由(2.12) 推知

$$\forall n \in N, \text{meas}\left\{x \in \Omega \mid |u_0(x)| < \frac{1}{n}\right\} > \varepsilon.$$

这与$u_0 \in S \subset V_k$ 而V_k 满足(2.7) 矛盾！故(2.12) 成立. 现在考察S 的覆盖

$$\{B_{\delta(u,\varepsilon)}\}_{u \in S},$$

其中

$$B_{\delta(u,,\varepsilon)} = \{\widetilde{u} \in V_k \mid |||\widetilde{u} - u||| < \delta(u, \varepsilon)\}.$$

据S 的紧性，$\{B_{\delta(u,\varepsilon)}\}_{u \in S}$ 中有有限子覆盖

$$\{B_{\delta(u_k,\varepsilon)}\}_{k=1,\cdots,m}.$$

于是(2.10) 对$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta(u_1, \varepsilon), \cdots, \delta(u_m, \varepsilon)\}$ 成立.

其次证(2.11). 为此，我们证$\forall v \in L^p(\Omega)$, $\exists \eta(\varepsilon, v) > 0$ 及$M(\varepsilon, v) > 0$ 使

$$\begin{aligned}&\left(w \in L^p(\Omega),\ \|w - v\|_{L^p(\Omega)} < \eta(\varepsilon, v)\right)\\&\Longrightarrow \left(\text{meas}\{x \in \Omega \mid |w(x)| > M(\varepsilon, v)\} < \varepsilon\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

反设不然，即存在$\widehat{v}_0 \in L^p(\Omega)$，使$\forall n \in I\!N$，$\exists v_n \in L^p(\Omega)$，使$\|v_n - \widehat{v}_0\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{n}$ 同时$\text{meas}\,\{x \in \Omega \mid |v_n(x)| > n\} > \varepsilon$，于是我们有

$$v_n \to \widehat{v}_0 \quad \text{于} \quad L^p(\Omega) \tag{2.14}$$

及

$$\int_\Omega |v_n(x)|^p dx \geq \int_{\{x\in\Omega \mid |v_n(x)|>n\}} |v_n(x)|^p dx > \varepsilon n^p. \tag{2.15}$$

由于(2.14) 与(2.15) 相矛盾．故(2.13) 成立．

现在考察K 的覆盖

$$\{B_{\eta(v,\varepsilon)}\}_{v\in K},$$

其中

$$B_{\eta(v,\varepsilon)} = \{\widetilde{v} \in L^p(\Omega) \mid \|\widetilde{v} - v\|_{L^p(\Omega)} < \eta(v,\varepsilon)\}.$$

由K 的紧性，$\{B_{\eta(v,\varepsilon)}\}_{v\in k}$ 中有有限子覆盖

$$\{B_{\eta(v_i,\varepsilon)}\}_{i=1,\cdots,r},$$

于是(2.11) 对$M(\varepsilon) = \max\{M(v_1,\varepsilon),\cdots,M(u_r,\varepsilon)\}$ 成立．

最后证明(2.9) 式．

设$\varepsilon > 0$．记$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3\text{ess sup}\,|h|}$．考察由(2.10) 和(2.11) 而定义的$\delta(\varepsilon_1)$ 和$M(\varepsilon_1)$．对$\forall u \in S, \forall v \in K$，记$\Omega_u = \{x \in \Omega \mid |u(x)| < \delta(\varepsilon_1)\}$，$\Omega_v = \{x \in \Omega \mid |v(x)| > M(\varepsilon_1)\}$．利用(2.10) 和(2.11) 不难推得：对$\forall u \in S$，$v \in K$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |h(tu(x)+v(x))|\,dx \\
&\leq \int_{\Omega_u} |h(tu(x)+v(x))|\,dx + \int_{\Omega_v} |h(tu(x)+v(x))|\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega\setminus(\Omega_u\cup\Omega_v)} |h(tu(x)+v(x))|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{\Omega\setminus(\Omega_u\cup\Omega_v)} |h(tu(x)+v(x))|\,dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

显然，对$\forall u \in S$, $\forall v \in K$, 当$x \in \Omega\backslash(\Omega_u \cup \Omega_v)$ a.e. 时，我们有$|u(x)| \geq \delta(\varepsilon_1)$, $|v(x)| \leq M(\varepsilon_1)$. 因此，由(2.8) 式，存在$L > 0$ (L不依赖于$u \in S, v \in K$ 及$x \in \Omega\backslash(\Omega_u \cup \Omega_v)$), 使得当$|t| \geq L$ 时，我们有

$$|h(tu(x) + v(x))| < \frac{\varepsilon}{3\text{meas}\Omega} \tag{2.17}$$

对$\forall u \in S, \forall v \in K$ 及a.e. $x \in \Omega\backslash(\Omega_u \cup \Omega_v)$ 成立. 故当$|t| \geq L$ 时，从(2.16) 和(2.17) 推知：$\forall u \in S, \forall v \in K, \int_\Omega |h(tu(x) + v(x))|dx < \varepsilon$.

∎

利用上述引理 1, 我们可以证明如下结果.

定理 4.2.1 设(g_1) 和(g_2) 成立，则由(2.2) 定义的泛函f 在$(0, +\infty)$ 上满足C 条件.

证明 首先证明在$H_0^1(\Omega)$ 的任何有界子集上[P.S.] 条件成立. (即定义1 的(i)).

设$\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega), \{u_n\}$ 有界且$f'(u_n) \to 0$ 于$(H_0^1(\Omega))'$, 则

$$-\Delta u_n - \lambda_k u_n + g(u_n) \to 0 \qquad 于 \quad H^{-1}(\Omega). \tag{2.18}$$

因$\{u_n\}$ 有界，故存在$\{u'_n\} \subset \{u_n\}, \{u'_n\}$ 弱收敛于$u_0 \in H_0^1(\Omega)$. 由(2.18), 我们有

$$u'_n - \lambda_k(-\Delta)^{-1}u'_n + (-\Delta)^{-1}[g(u'_n)] \to 0 \quad 于 \ H_0^1(\Omega). \tag{2.19}$$

由于$u \mapsto g(u)$ 是$H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 的全连续映象，因此

$$(-\Delta)^{-1}[g(u'_n)] \to (-\Delta)^{-1}[g(u_0)] \qquad 于 \quad H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

进一步，由标准的论证过程不难推得

$$(-\Delta)^{-1}u'_n \to (-\Delta)^{-1}u_0 \qquad 于 \quad H_0^1(\Omega). \tag{2.21}$$

结合(2.19), (2.20) 及(2.21) 知：$\{u'_n\}$ 在$H_0^1(\Omega)$ 中收敛.

下证满足定义1 的(ii). $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ 可唯一地分解成

$$u = u^+ + u^- + u_0,$$

其中

$$u^+ \in H^+(k+1), \quad u^- \in H^-(k-1), \quad u_0 \in M_k.$$

显然,

$$\|u^+\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} |u_j|^2 \lambda_j, \qquad u_j \in M_j, j \geq k+1,$$

则

$$\|u^+\|^2 - \lambda_k |u^+|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} |u_j|^2 (\lambda_j - \lambda_k) \geq \eta \|u^+\|^2, \tag{2.22}$$

其中$\eta > 0$ 不依赖于$u \in H_0^1(\Omega)$.

进一步, 不难看出, 存在不依赖于$u \in H_0^1(\Omega)$ 的$\mu, \tau > 0$, 使

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_k |u^-|^2 - \|u^-\|^2 \geq \mu \|u^-\|^2 \\ \|u^-\|^2 - \lambda_k |u^-|^2 \geq -\tau \|u^-\|^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \tag{2.23}$$

设$c \in (0, +\infty)$, 选取$\sigma = \frac{c}{2}$, 并令

$$\alpha = \min\left\{\frac{3}{4}(c - \sigma), \mu\right\}. \tag{2.24}$$

取$\delta > 0$, 使

$$\left|\int_\Omega g(u) v dx\right| \leq \delta \|v\|, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.25}$$

再选取$\rho > 0$, 使

$$\frac{\eta \rho^2 - 2(c + \sigma + q)}{\eta + \tau} \geq \left(\frac{\delta}{\mu} + 1\right)^2, \tag{2.26}$$

其中$q = \text{meas}\,\Omega.\ \sup|G(t)|$.

由于$H_0^1(\Omega)$ 中的球B_ρ 是$L^2(\Omega)$ 中的紧集，又当$|t| \to \infty$ 时，$G(t)$ 和$g(t)t$ 均趋于0, 因此据引理1 可知：存在$\gamma > 0$, 使

$$(u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\| > \gamma,\ u^+ + u^- \in B_\rho)$$
$$\Longrightarrow \left(\int_\Omega |G(u)|dx \le \frac{c-\sigma}{2} \text{ 及 } \int_\Omega |g(u)u|dx \le \frac{c-\sigma}{4}\right). \tag{2.27}$$

现在选择

$$R > \max\{1, \gamma\}.$$

我们将证明

$$\forall u \in f^{-1}([c-\sigma, c+\sigma]), \|u\| \ge R \quad \Longrightarrow \quad \|f'(u)\| \cdot \|u\| \ge \alpha. \tag{2.28}$$

对于$\forall\, u \in f^{-1}([c-\sigma,\ c+\sigma])$, $\|u\| \ge R$, 显然有

$$c-\sigma \le \frac{1}{2}\left(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 - \lambda_k(|u^+|^2 + |u^-|^2)\right)$$
$$+ \int_\Omega G(u)\,dx \le c + \sigma. \tag{2.29}$$

先考察$u^+ + u^- \in B_\rho$ 的情形. 此时，由(2.29) 和(2.27) 可知

$$\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 - \lambda_k(|u^+|^2 + |u^-|^2) \ge c - \sigma.$$

再由(2.27) 和(2.24), 得

$$\|f'(u)\| \cdot \|u\| \ge \langle f'(u),\ u\rangle$$
$$= \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 - \lambda_k(|u_+|^2 + |u_-|^2) + \int_\Omega g(u)u\,dx$$
$$\ge c - \sigma - \frac{c-\sigma}{4} \ge \alpha.$$

再考察$u^+ + u^- \notin B_\rho$ 的情形.

由(2.29) 我们有

$$\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 - \lambda_k(|u^+|^2 + |u^-|^2) \le 2(c+\sigma+q),$$

故由(2.22) 和(2.23) (b), 推知

$$\eta\|u^+\|^2 - \tau\|u^-\|^2 \le 2(c+\sigma+q). \tag{2.30}$$

据(2.30), (2.26) 及$u^+ + u^- \notin B_\rho$ 的事实推知,

$$\|u^-\|^2 \ge \frac{\rho^2\eta - 2(c+\sigma+q)}{\eta+\tau} \ge \left(\frac{\delta}{\mu}+1\right). \tag{2.31}$$

现在显然有

$$\begin{aligned}\|f'(u)\|\cdot\|u\| &\ge -\langle f'(u), u^-\rangle \frac{\|u\|}{\|u^-\|} \\ &= \left(-\|u^-\|^2 + \lambda_k|u^-|^2 - \int_\Omega g(u)u^-\,dx)\frac{\|u\|}{\|u^-\|}\right).\end{aligned}$$

至此，利用(2.23) (a), (2.25), (2.31) 及(2.24), 便可推得

$$\begin{aligned}\|f'(u)\|\cdot\|u\| \ge&(\mu\|u^-\| - \delta)\|u\| \\ \ge&\mu\|u\| \ge \alpha\|u\| \\ \ge&\alpha R \ge \alpha.\end{aligned}$$

∎

4.2.3 解的存在性

本节证明定理4.2.A. 首先证明如下引理:

引理 2 设(g_1) 和(g_2) 成立. 则对$\forall\,\delta > 0$, $\exists\,R > 0$, 使

$$f(u) \le \delta, \qquad \forall\, u \in H^-(k) : |u| \ge R.$$

证明　设$u\in H^-(k)$. 则u 可唯一地分解成$u=u^-+u_0$，$u^-\in H^-(k-1)$，$u_0\in M_k$ 从而

$$\begin{aligned}f(u)&=\frac{1}{2}\big(\|u^-\|^2+\|u_0\|^2\\&\quad-\lambda_k(|u^-|^2+|u_0|^2)\big)+\int_\Omega G(u)\,dx\\&=\frac{1}{2}\big(\|u^-\|^2-\lambda_k|u^-|^2\big)+\int_\Omega G(u)\,dx\\&\le\frac{1}{2}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)|u^-|^2+\int_\Omega|G(u)|\,dx,\end{aligned}\tag{2.32}$$

其中当$k=0$ 时，$\lambda_{k-1}=0$. 令

$$m=\sup|G(t)|\cdot\operatorname{meas}\Omega.$$

考察$\rho:\rho>0$ 且满足

$$\rho^2>\frac{2m}{|\lambda_{k-1}-\lambda_k|}.\tag{2.33}$$

$\forall\delta>0$, 由引理1, 存在$R>0$, 使

$$(|u^-|<\rho,\ |u|>R)\Longrightarrow\left(\int_\Omega|G(u)|dx\le\delta\right).\tag{2.34}$$

至此不难验证

$$f(u)\le\delta\qquad\text{当}\quad|u|>R.\tag{2.35}$$

事实上，对于$u\in H^-(k)$, $|u|>R$, 分以下两种情形讨论.

(1°) 当$|u^-|<\rho$ 时，由(2.32) 和(2.34) 便可推出(2.35).

(2°) 当$|u^-|\ge\rho$ 时，由(2.32) 和(2.33) 我们推出$f(u)\le0$. ∎

定理4.2.A 的证明　分两种情形讨论.

(1°) $G(0)=0$. 据条件(g_3), G 在0 达最小值. 故$g(0)=0$, 从而(2.1) 有平凡解$u\equiv 0$.

(2°) $G(0)>0$, 则

$$\forall\, u\in H^+(k+1), \qquad f(u)>0.$$

令

$$\gamma=\inf\left\{f(u)\mid u\in H^+(k+1)\right\}.$$

下证$\gamma>0$. 为此, 只需证

$$\exists\, u_0\in H^+(k+1) \qquad 使 \quad f(u_0)=\gamma. \tag{2.36}$$

显然

$$\forall\, u\in H^+(k+1) \qquad 有 \quad \|u\|^2\geq \lambda_{k+1}|u|^2.$$

故$\forall\, u\in H^+(k+1)$, 有

$$f(u)\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2+\int_\Omega G(u)\,dx\geq \text{const.}\cdot\|u\|^2.$$

又不难验证$f:H_0^1(\Omega)\to I\!R$ 弱下半连续. 故f 在$H^+(k+1)$ 上达到最小值. (自然该最小值严格大于0). 此即(2.36) 成立.

由引理 2, 存在$R>0$, 使

$$f(u)\leq\frac{\gamma}{2} \qquad \forall\, u\in H^-(k)\cap S_R,$$

其中$S_R=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid \|u\|=R\}$. 现在, 取

$$\partial Q=S_R\cap H^-(k), \qquad S=H^+(k+1).$$

则∂Q 与S 环绕(参§1.8) 且f 在$Q=B_R\cap H^-(k)$ 上有界. 又据定理4.2.1, f 在$(0,+\infty)$ 上满足C 条件. 由定理4.2.0 便可推出要证.

∎

4.2.4 非平凡解的存在性

本小节始终假定$g(0)=0$. 这便保证了$u\equiv 0$ 始终为(2.1) 的解. 我们的目的是寻找(2.1) 的非零解. 我们先给出一个较为一般的非平凡解存在性定理，而将定理4.2.B 作为该一般定理的推论.

定理 4.2.2 设$g(0)=0, G(0)\geq 0$. 假设$(g_1), (g_2)$ 成立. 如果下列条件(i) 和(ii) 中有一个成立，则(2.1) 至少有一个非平凡解；

(i)
$$\lambda_0-\lambda_k+g'(0)>0; \tag{2.37}$$

(ii) $\lambda_k\neq\lambda_0$ 且存在$\lambda_h\in\sigma(-\Delta):\lambda_1\leq\lambda_h\leq\lambda_k$, 使

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}\quad \lambda_h-\lambda_k+g'(0)>0,\\ &\text{(b)}\quad \frac{1}{2}(\lambda_{h-1}-\lambda_k)t^2+G(t)\leq G(0),\quad \forall t\in R.\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

推论 (定理4.2.B) 设$g(0)=0$. 假设$(g_1), (g_2)$ 和(g_3) 成立. 进一步，设

$$g'(0)=\sup\{g'(t),\ t\in\mathbb{R}\}, \tag{2.39}$$

则(2.1) 至少有一个非平凡解.

证明 若$g(t)\equiv 0$, 则结论显然成立.

现设对某个$t\in\mathbb{R}, g(t)\neq 0$. 则由$(g_2), (g_3)$ 及(2.39) 知$g'(0)>0$, 令

$$\overline{h}=\min\{h\in\mathbb{N}\mid \lambda_h-\lambda_k+g'(0)>0\}.$$

如果$\overline{h}=0$. 则结论由定理4.2.2 立即推得. 如果$\overline{h}\geq 1$. 令

$$G_{\overline{h}}(t)=\frac{1}{2}(\lambda_{\overline{h}-1}-\lambda_k)t^2+G(t),$$

则

$$G'_{\overline{h}}(0)=0. \tag{2.40}$$

进一步，由(2.39) 及$\overline{h}$ 的定义，我们有

$$G''_{\overline{h}}(0) \le 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

于是，由(2.40) 和(2.41) 知，$h = \bar{h}$ 时的(2.38) 被满足. 再由定理4.2.2 便可推出要证的. ∎

在给出定理4.2.2 的证明之前，必须先搞清f 在原点和在无穷的行为. 为此先证明两个引理.

引理 3 设$g(0) = 0$. 假设$(\mathrm{g}_1), (\mathrm{g}_2)$ 成立并且

$$\lambda_h - \lambda_k + g'(0) > 0 \qquad 对某 \quad h \in \mathbb{N}, \tag{2.42}$$

则存在$\gamma, \rho > 0$, 使

$$\big(u \in H^+(h), \|u\| = \rho\big) \Longrightarrow \big(f(u) \ge f(0) + \gamma\big).$$

证明 设$u \in H^+(h), u = \sum_{j=h}^{\infty} u_j, u_j \in M_j$, 则

$$\begin{aligned} f(u) =& f(0) + f'(0)[u] + \frac{1}{2} f''(0)[u, u] + o(\|u\|^2) \\ =& f(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=h}^{\infty} (\lambda_j + g'(0) - \lambda_k) |u_j|^2 + o(\|u\|^2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

由(2.42) 式，可知

$$\frac{1}{2} \sum_{j=h}^{\infty} (\lambda_j + g'(0) - \lambda_k) |u_j|^2 \ge c \sum_{j=h}^{\infty} \lambda_j |u_j|^2 = c\|u\|^2, \tag{2.44}$$

其中$c > 0$ 为不依赖于u 的常数.

由(2.43) 和(2.44), 便推得

$$f(u) \ge f(0) + c\|u\|^2 + o(\|u\|^2), \qquad \forall u \in H^+(h),$$

由此立即推得要证的. ∎

在给出一个描述f 在无穷的行为的引理之前，先介绍一些记号. 设$R>0$, $e\in M_h$ 满足$\|e\|=1$. 记

$$T(h,R)=\{te:0\le t\le R\},$$

而

$$Q(h,R)=\{u+v\mid u\in H^-(h-1),\ \|u\|\le R\ \text{而}\ v\in T(h,R)\},\tag{2.45}$$

则$Q(h,R)$ 是一个有界的具边界$\partial Q(h,R)$ 的Hilbert 流形.

注 $\partial Q(h,R)$ 为$Q(h,R)$ 在$(\mathrm{span}\{e\})\oplus H^-(h-1)$ 中的边界.

显然

$$Q(0,R)=T(0,R)\ \text{而}\ \partial Q(0,R)=\{0,Re\}.$$

引理 4 假设(g_1) (g_2) 成立. $B_\rho\triangleq\{u\in H_0^1(\Omega)\mid \|u\|\le\rho)\}$. 假设$G(0)\ge 0$. 设$h\in\mathbb{N}$, 考察$Q(h,R)$. 进一步，假设下列条件(i), (ii) 有一个成立.

(i) $h=0$;

(ii) $\lambda_k\ne\lambda_0$ 且存在$\lambda_h\in\sigma(-\Delta):\lambda_1\le\lambda_h\le\lambda_k$ 使

$$\frac{1}{2}(\lambda_{h-1}-\lambda_k)t^2+G(t)\le G(0),\qquad \forall t\in\mathbb{R},\tag{2.46}$$

则对$\forall\delta>0,\exists R>0$, 使

$$f(u)\le f(0)+\delta\qquad \forall\, u\in\partial Q(h,R).\tag{2.47}$$

证明 如果$h=0$, 则

$$\partial Q(0,R)=\{0,Re\},\qquad e\in M_0,\quad \|e\|=1.$$

由引理1 及$G(0)\geq 0$ 的事实推知结论成立.

现在设条件(2.46) 成立. 对任意$\delta>0$, 欲证(2.47), 只要证得

$$f(u)\leq f(0)\qquad \forall\, u\in H^{-}(h-1) \tag{2.48}$$

及存在$R>0$ 充分大，使

$$f(u)\leq \delta\qquad \forall\, u\in H^{-}(h):\|u\|\geq R \tag{2.49}$$

就够了.

(2.48) 可由(2.46) 直接推得. 事实上，$\forall\, u\in H^{-}(h-1)$,

$$\begin{aligned} f(u) \leq & \frac{1}{2}(\lambda_{h-1}-\lambda_k)|u|^2+\int_\Omega G(u)\,dx \\ = & \int_\Omega\left(\frac{1}{2}(\lambda_{h-1}-\lambda_k)u^2+G(u)\right)\,dx \\ \leq & \int_\Omega G(0)\,dx=f(0). \end{aligned}$$

下证(2.49). 设$u\in H^{-}(h)$, $u=\sum_{i=1}^{h}u_i$, $u_i\in M_i$, 则

$$f(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h}(\lambda_i-\lambda_k)|u_i|^2+\int_\Omega G(x)\,dx \tag{2.50}$$

下分两种情形：(i) 当$h<k$ 时，则由(2.50) 我们有

$$f(u)\to-\infty,\quad \text{当 } \|u\|\to\infty,$$

故(2.49) 成立. (ii) 当$h=k$ 时，由引理2 立即推得结论. ∎

定理4.2.2 的证明　首先假设(2.37) 成立. 则由引理3 和引理4 (利用h=0 时情形) 推知：存在三个正数$\rho,R,\gamma:R>\rho$ 使得下列关系式成立

$$\begin{aligned} & f(u)\geq f(0)+\gamma\qquad \forall\, u\in S_\rho=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid \|u\|=\rho\} \\ & f(e)\leq f(0)+\frac{\gamma}{2}\qquad \forall\, e\in M_0\cap S_R. \end{aligned}$$

显然$f(0)=G(0)\geq 0$. 于是我们有

$$0<f(0)+\frac{\gamma}{2}<f(0)+\gamma.$$

现在固定$e\in M_0\cap S_R$. 取

$$Q=\{te\mid t\in[0,R]\},\quad S=S_\rho,$$

则∂Q 与S 环绕. 又由定理4.2.1, f 在$(0,+\infty)$ 上满足C 条件, 故由定理4.2.1, f 具有一个临界值$f(u_0)\geq f(0)+\gamma$. 于是u_0 是(2.1)的一个非平凡解.

其次, 假设(2.38) 成立. 则由引理3 和引理4 推知: 存在$\rho,R,\gamma>0$: $R>\rho$, 使

$$\forall u\in H^+(h):\|u\|\geq\rho \text{ 有 } f(u)\geq f(0)+\gamma$$
$$\forall u\in\partial Q(h,R)\qquad\text{有}\quad f(u)\leq f(0)+\frac{\gamma}{2}.$$

取

$$S=\{u\in H^+(h)\mid\|u\|=\rho\},\qquad Q=Q(h,R),$$

则S 与∂Q 环绕. 容易验证f 在Q 上有界. 再利用定理4.2.1, 推知f 具有一个临界点u_0, 使$f(u_0)\geq f(0)+\gamma$. 即u_0 为(2.1) 的一个非平凡解. ∎

§ 4.3 波方程 • 强共振 • Link 理论

本节讨论波方程自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+\lambda u+g(u)=0, & x\in(0,\pi),\quad t\in\mathbb{R}\\ u(x,t)=0, & x=0,\pi,\quad t\in\mathbb{R}\\ u(x,t+2\pi)=u(x,t), & x\in[0,\pi],\quad t\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{3.1}$$

的可解性及在$g(0)=0$时非平凡解的存在性. 其中$\lambda \in \sigma(-\Box)$, $\sigma(-\Box)$是波算子

$$-\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

的谱; $g \in C^\infty$ 满足

(g_1) $g(t)t \to 0 \quad (|t| \to \infty)$;

(g_2) $G(t) = \int_{-\infty}^t g(s)\,ds \to 0\,(t \to \infty)$.

在§4.2 中, 我们已经遇到过条件(g_1) 和(g_2). 条件(g_1) 和(g_2)属于强共振条件.

本节内容选自汪守宏[116]. 所用方法是Coron[118] 挖去零空间的方法及临界点理论. 主要结果有如下两个: 设$\lambda = \lambda_m \in \{k^2 - j^2 \mid j > 0, j$ 奇整数, k 偶数$\}$.

定理 4.3.1 如果$G(t) \le 0\,(t \in \mathbb{R})$ 或者$G(t) \ge 0\,(t \in \mathbb{R})$, 则问题$(3.1)_{\lambda=\lambda_m}$ 至少有一个解.

定理 4.3.2 设$g(0) = 0$ 且下列条件之一成立:

(i) $G(0) \le 0$ 且存在整数$h \le m$ 使得

$$\lambda_h - \lambda_m - g'(0) > 0 \text{ 且 } \frac{1}{2}(\lambda_m - \lambda_{h-1})^2 t^2 + G(t) \ge G(0), \quad t \in \mathbb{R}; \tag{3.2}$$

(ii) $G(0) \ge 0$ 且存在整数$h \ge m$ 使得

$$\frac{1}{2}(\lambda_m - \lambda_{h+1})t^2 + G(t) \le G(0), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

$$\lambda_h - \lambda_m - g'(0) < 0; \tag{3.4}$$

则问题$(3.1)_{\lambda=\lambda_m}$ 至少有一非平凡解.

4.3.1 预备知识

不难看出, 问题(3.1) 之解对应于泛函

$$I_0(u) = \int_Q \left[\frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2 - \lambda u^2 - G(u)\right] dxdt \tag{3.5}$$

的临界点. 其中$Q=(0,\pi)\times(0,2\pi)$. 为方便记$|Q|=\text{meas }Q=2\pi^2$, 而ker $\Box$为$\Box$在$L^2(Q)$ 中的零空间.

由于ker$\Box$是无穷维的, 因而利用临界点理论求$I(u)$ 的临界点时, $I(u)$ 在ker$\Box$中失去紧性. 为了克服这个困难, Coron[108] 采用了挖去零空间的办法.

粗略地说, Coron 的方法是求(3.1) 在满足下列条件(i)–(ii) 的$L^2(Q)$ 的限制空间H 中的解:

(i) $H\cap\ker(\Box)=\{0\}$;

(ii) $\Box(H)\subset H,(\lambda+g)(H)\subset H.$

具体到(3.1), 令

$$E=\left\{u=\sum_{\substack{j>0\\ j\text{奇},k\text{偶}}}a_{jk}\sin jxe^{ikt}\ \middle|\ \|u\|^2\triangleq\frac{1}{2}|Q|\sum_{\substack{j>0\\ j\text{奇},k\text{偶}}}|j^2-k^2|\,|a_{jk}|^2<\infty\right\}.$$

不难验证, E 是以$\|\cdot\|$ (见E 的定义) 为范数的满足上述条件(i)–(ii) 的Hilbert 空间, 并且E 满足:

$$E\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(Q),\quad E\hookrightarrow L^r(Q)\qquad(2\le r<\infty);$$
$$u(x,t+\pi)=u(x,t)=u(\pi-x,t),\qquad\forall u\in E.$$

现在, 令

$$\begin{aligned}\Lambda=&\{k^2-j^2\mid j>0,j\text{ 奇整数},k\text{ 偶整数}\}\\=&\{\lambda_n\mid n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdots<\lambda_{-n}<\cdots<\lambda_{-1}\\&<0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots\}.\end{aligned}$$

又令M_n 为算子$-\Box$在E 中对应于$\lambda_n(n\neq0)$ 的特征向量空间. 记$\lambda_0=0$, $M_0=\{0\}$, 则 $E=\overline{\oplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n}$. 再令 $E^+(m)=\overline{\oplus_{n\ge m}M_n}$,

$E^-(m) = \overline{\oplus_{n\le m} M_n}$, $E^\pm = E^\pm(0)$. 则$\forall u\in E$, 我们有分解

$$u=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j = w^+ + w^-,$$

其中$u_j\in M_j, w^\pm\in E^\pm$.

此外，对于定理4.3.1 和定理4.3.2, 应该注意以下两点.

注 1 我们并没有对每一个$\lambda\in\sigma(-\Box)$ 讨论强共振问题(3.1). 定理4.3.1 和定理4.3.2 仅论及在$\lambda=\lambda_m\in\Lambda(\subset\sigma(-\Box))$ 强共振的情形.

注 2 $(3.1)_{\lambda=\lambda_m}$ 所对应的泛函：$I: E\to \mathbb{R}$

$$I=\int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u_t^2-u_x^2-\lambda_m u^2)-G(u)\right]dxdt \tag{3.6}$$

的临界点即为问题$(3.1)_{\lambda=\lambda_m}$ 的弱解.

下面给出一个抽象的临界点定理.

引理 1 设F 是一个具内积$(\cdot,\cdot)$ 的实Hilbert 空间. 设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha<\beta$ 及$\varphi\in C^1(F,\mathbb{R})$ 满足

(φ_1) $\varphi(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-\psi(u)$, 其中$L$ 是E 上有界自伴线性算子，使得$F=\overline{\oplus_{j\in\mathbb{Z}}F_j}$ 且F_j 是F 的有限维L- 不变子空间，而$\psi\in C(F,\mathbb{R})$ 使ψ' 是紧算子；

(φ_2) 0 不属于L 的本质谱；

(φ_3) $\forall c\in(\alpha,\beta)$ 以及F 中的序列$\{u_n\}$: $\varphi(u_n)\to c$ 及$\|\varphi'(u_n)\|\cdot\|u_n\|\to 0$, 则$\{u_n\}$ 有有界子列；

(φ_4) $\varphi(u)\ge\beta, \forall u\in S$; 及$\varphi(u)\le\alpha, \forall u\in\partial Q$; 且

$$\sup_{u\in Q}\varphi(u)=c_\infty<\infty;$$

则φ 至少有一个临界值$c\in[\beta,c_\infty]$. 其中Q 和S 为下列三种情况之一.

(i) $Q=B_R\cap F^1, S=F^2$. 这里$F=F^1\oplus F^2$, 且F^1,F^2 都是L的不变子空间, $B_R=\{u\in F\mid \|u\|_F\le R\}$;

(ii) $Q=B_R\cap F^1, S=q+F^2$, 其中$q\in Q; \|q\|_F<R$;

(iii) $\exists R_1,R_2,\rho>0, R_1>\rho$, 使$S=S_\rho\cap F^2$,

$$Q=\{x+y\mid x\in F^1\cap B_{R_2},\ y\in T\}.$$

其中

$$S_\rho=\partial B_\rho,\quad T=\{te\mid 0\le t\le R_1\},\qquad e\in F^2:\|e\|=1.$$ ▮

现在考虑泛函I(参(3.6)). 令

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\lambda_m\|u\|_{L^2}^2+\int_Q G(u)\,dxdt, \tag{3.7}$$

$$(Lu,v)=\int_Q(u_tv_t-u_xv_x)\,dxdt\quad \forall u,v\in E, \tag{3.8}$$

其中$(\cdot,\cdot)$为E中内积. 不难验证. I 满足(φ_1), (φ_2). 另外, 有如下引理.

引理 2 I 和$-I$ 都满足$\alpha=0$ 时的(φ_3).

为给出引理 2 的证明, 我们需要如下引理.

引理 3 设V 是$C(\overline{Q})$ 的一个有限维子空间使得对$\forall x\in V\backslash\{0\}$有$u\ne 0$ a.e. 于Q. 又令K 是$L^p(Q)(p\ge 1)$ 中的一个紧子集. 设$h\in L^\infty(I\!R)$ 使$h(t)\to 0$ $(|t|\to\infty)$. 则

$$\int_Q|h(su(x,t)+v(x,t))|dxdt\to 0, |s|\to\infty.$$

对$v\in K$, $u\in S$ 一致地成立. 其中

$$S=\{u\in V\mid 1=|||u|||\triangleq\sup_Q|u(x,t)|\}.$$

注 3 引理3 是§4.2 的引理1 在本节情况下的重写.

引理2 的证明 令$\{u^n\}$是E 中满足

$$\|I'(u^n)\|\cdot\|u^n\|\to 0,\qquad I(u^n)\to C>0,\quad n\to\infty \tag{3.9}$$

的序列. 为了方便起见, 略去u^n 的上标n, 并且记$u^n=u=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}u_j$. 因为

$$\begin{aligned}\left|I'(u)\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\right)\right|&\le\|I'(u)\|\cdot\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\right\|\\&\le\|I'(u)\|\cdot\|u\|\le K,\end{aligned}$$

这里$K>0$ 不依赖于n 的常数. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=m+1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_m)\|u_j\|_{L^2}^2&\le K+\left|\int_Q g(u)\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\right)\right|\\&\le K+C_1\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\right\|,\end{aligned}$$

其中C_1 是不依赖于n 的常数.

另一方面

$$\begin{aligned}&\sum_{j=m+1}^{\infty}(\lambda_j-\lambda_m)\|u_j\|_{L^2}^2\\=&\sum_{\substack{j=m+1\\j\ne0}}^{\infty}\frac{\lambda_j-\lambda_m}{|\lambda_j|}\|u_j\|^2\\\ge&c_2\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\right\|^2,\end{aligned}$$

其中$c_2>0$为不依赖于n的常数. 于是结合上两式可得$\|\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j\|$是有界的，即有不依赖于$n$的界. 同理可得$\|\sum_{j=-\infty}^{m-1}u_j\|$是有界序列. (注意我们略去了上标$n$). 这样就证明了$\{u^n-u_m^n\}$是有界列. 其中$u_m^n$是$u^n$在$M_m$中的分量. 从而如果$\{u^n\}$是无界列，则可设$\|u_m^n\|\to\infty\,(n\to\infty)$, 故可得$|||u_m^n|||\to\infty\,(n\to\infty)$.

因为$\{u^n-u_m^n\}$是E中有界列，故它在$L^2(Q)$中列紧. 于是利用引理3及条件(g_1)和(g_2). 有

$$\int_Q \left|2G(u^n)-g(u^n)u^n\right| dxdt\le c-\delta \tag{3.10}$$

对充分大的n成立. 其中$\delta>0$使$c-\delta>0$. 由于$I(u^n)\to c$. 不妨令$I(u^n)>c-\delta$. 于是

$$\begin{aligned}\|I'(u)\|\cdot\|u\|\ge&(I'(u),u)=\int_Q(u_t^2-u_x^2-\lambda_m u^2-g(u)u)\,dxdt\\ \ge&2(c-\delta)+\int_Q(2G(u)-g(u)u)\,dxdt.\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.10)-(3.11) 意味着对充分大的n都有

$$\|I'(u^n)\|\cdot\|u^n\|\ge c-\delta>0,$$

矛盾. 这样就证明了$\{u^n\}$是有界列. 即I满足$\alpha=0$时的(φ_3).

同理可证$-I$也满足$\alpha=0$时的(φ_3). ∎

4.3.2 定理 4.3.1 的证明

为了给出定理4.3.1 的证明，我们需要如下引理.

引理 4 $\forall\delta>0$, 则存在$R>0$使

(i) $I(u)\le\delta,\ \forall\,u\in E^-(m):\|u\|\ge R$;

(ii) $I(u)\ge-\delta,\ \forall\,u\in E^+(m):\|u\|\ge R$.

证明　只证(1). (2) 同理可证. 设 $u \in E^-(m)$

$$I(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{m}(\lambda_j - \lambda_m)\|u_j\|_{L^2}^2 - \int_Q G(u)\,dxdt$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{m-1}\left|\frac{\lambda_m}{\lambda_j} - 1\right| \cdot \|u_j\|^2 - \int_Q G(u)\,dxdt$$
$$\leq -\frac{1}{2}C\|u - u_m\|^2 - \int_Q G(u)\,dxdt, \tag{3.12}$$

其中$C > 0$ 为不依赖于u 的常数. 令

$$B = 2\pi^2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |G(t)|$$

以及$\rho > 0$ 使

$$\rho^2 > \frac{2B}{c},$$

则由引理3 知；对$\forall \delta > 0, \exists R > 0$, 使

$$\int_Q |G(u)| dxdt < \delta, \qquad \forall u \in E^-(m) : \|u - u_m\| \leq \rho, \quad \|u\| \geq R.$$

因此$\forall u \in E^-(m)$, $\|u\| \geq R$ 有

(i) 如$\|u - u_m\| \leq \rho$, 则

$$I(u) \leq -\frac{C}{2}\|u - u_m\|^2 + \delta \leq \delta;$$

(ii) 如$\|u - u_m\| > \rho$, 则

$$I(u) \leq -\frac{C}{2} \cdot \frac{2B}{C} + B = 0.$$ ∎

定理4.3.1 的证明　只证$G(t) \leq 0\,(t \in \mathbb{R})$ 的情形，而另一情形类似可证. 不妨设$G(0) < 0$. 不然的话$G(0) = 0$, 从而$g(0) = 0$, 于是0 是问题(3.1) 之解. 由于 $\forall u \in E^+(m+1)$,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \lambda_m)\|u\|_{L^2}^2 - \int_Q G(u)\,dxdt > 0$$

以及I 在$E^+(m+1)$ 上是下半弱连续的(这是由于

$$I(u)=\frac{1}{2}(\|w^+\|^2-\|w^-\|^2-\lambda_m\|u\|_{L^2}^2)-\int_Q G(u)\,dxdt$$

及这个等式中第一项为下半弱连续，第二项由于w^- 在$E^-\cap E^+(m+1)$ 有限维空间上取值因而是弱连续的，第三项、第四项的弱连续性由$E\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\overline{Q})$ 保证). 所以存在$u_0\in E^+(m+1)$ 使

$$\gamma\triangleq\inf_{u\in E^+(m+1)}I(u)=I(u_0)>0.$$

据引理4, 存在$R>0$, 使

$$I(u)\le\frac{\gamma}{2}$$

对$\forall u\in E^-(m)\cap\partial B_R$ 成立. 于是取$Q=E^-(m)\cap B_R, S=E^+(m+1)$, 则由引理1, I 至少有一个临界值属于$[\gamma,\infty)$. ∎

4.3.3 非平凡解的存在性

在给出定理4.3.2 的证明之前，我们需要下面的两个引理.

引理 5 设$g(0)=0$, 则

(i) 如果存在h 使$\lambda_h-\lambda_m-g'(0)>0$, 则$\exists\gamma,\rho>0$ 使$I(u)\ge I(0)+\gamma, \forall u\in E^+(h), \|u\|=\rho$;

(ii) 如果存在h 使$\lambda_h-\lambda_m-g'(0)<0$, 则$\exists\gamma, \rho>0$ 使$I(u)\le I(0)+\gamma, \forall u\in E^-(h):\|u\|=\rho$.

证明 结论(i) 从下不等式可得. (ii) 类似可证

$$\begin{aligned}I(u)=&I(0)+I'(0)u+\frac{1}{2}I''(0)u^2+o(\|u\|^2)\\=&I(0)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=h\\j\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_j-\lambda_m-g'(0)}{|\lambda_j|}\|u_j\|^2+o(\|u\|^2)\\\ge&I(0)+\frac{C}{2}\|u\|^2+o(\|u\|^2),\qquad\forall u\in E^+(h),\end{aligned}$$

其中

$$C = \inf_{\substack{j \geq h \\ j \neq 0}} \frac{\lambda_j - \lambda_m - g'(0)}{|\lambda_j|} > 0.$$

∎

设$e \in M_h : \|e\| = 1$, 其中$h \neq 0$. 于是对$R > 0$ 令

$$P(h, R) = \{u + v \mid u \in E^+(h+1), \|u\| \leq R, v \in T(h, R)\}, \tag{3.13}$$

$$Q(h, R) = \{u + v \mid u \in E^-(h-1), \|u\| \leq R, v \in T(h, R)\}, \tag{3.14}$$

其中$T(h, R) = \{te \mid 0 \leq t \leq R\}$.

引理 6 (i) 如$G(0) \leq 0$ 且存在$h \neq 0, h \leq m$ 满足

$$\frac{1}{2}(\lambda_m - \lambda_{h-1})t^2 + G(t) \geq G(0), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

则$\forall \delta > 0$, $\exists R > 0$ 使$I(u) \leq I(0) + \delta, \forall u \in \partial Q(h, R)$.

(ii) 如$G(0) \geq 0$ 且存在$h \neq 0, h \geq m$ 满足

$$\frac{1}{2}(\lambda_m - \lambda_{h+1})^2 t^2 + G(t) \leq G(0), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

则$\forall \delta > 0, \exists R > 0$ 使$I(u) \geq I(0) - \delta$, $\forall u \in \partial P(h, R)$.

证明　只证(i). (ii) 类似可证.

首先类似于引理4 可得: $\forall \delta > 0, \exists R > 0$ 使$I(u) \leq \delta$ 对$\forall u \in E^-(h) : \|u\| \geq R$ 成立.

其次对$u \in E^-(h-1)$, 有

$$\begin{aligned} I(u) =& \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{h-1} (\lambda_j - \lambda_m)\|u_j\|_{L^2}^2 - \int_Q G(u)\, dxdt \\ \leq& \frac{1}{2}(\lambda_{h-1} - \lambda_m)\|u\|_{L^2}^2 - \int_Q G(u)\, dxdt \\ \leq& \int_Q [-G(0)]\, dxdt \qquad (\text{条件 } (3.15)) \\ =& I(0). \end{aligned}$$

由于$I(0) \geq 0$, 故上两点便可推知

$$I(u) \leq I(0) + \delta, \qquad \forall u \in \partial Q(h, R).$$ ∎

定理4.3.2 的证明　我们只证(i) 中$h \neq 0$ 的情形，其他情形类似可证. 由引理5, 存在$\gamma, \rho > 0$ 使$I(u) \geq I(0) + \gamma, \forall u \in E^{+}(h) : \|h\| = \rho$.

而引理6 告诉我们：存在$R : R > \rho$, 使

$$I(u) \leq I(0) + \frac{1}{2}\gamma, \qquad \forall u \in \partial Q(h, R).$$

于是由于$\sup_{u \in Q(h,R)} I(u) < \infty$, 从引理1 立得$I(u)$ 有临界值$c \in [I(0) + \gamma, \infty)$. ∎

§ 4.4 两点边值问题 • 周期非线性项 • 临界点理论

设$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续的以T 为周期的函数，$h \in L^{1}(0, \pi)$. 本节讨论半线性二阶常微分方程两点边值共振问题

$$\begin{aligned} -u'' - u + g(u) &= h \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

的可解性. 不难看出，这里的g 和h 一般不满足Landesman-Lazer条件.

在运用临界点理论研究问题(4.1) 的过程中，Ward [107] 使用了一种非常有趣的变分技巧，来补救(4.1) 所对应的泛函的“紧性失缺”. 该技巧在§4.5 中将被发展，并用于半线性椭圆方程边值共振问题的研究.

4.4.1 预备知识

在一般的数学分析教程中，都有称为黎曼引理的如下结果.

引理 1 设函数$\psi(u)$ 在$[a,b]$ 上可积和绝对可积，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du=0,$$
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(u)\cos pu\,du=0.$$

作为上述黎曼引理的推广，我们有如下引理.

引理 2 设$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续的T 周期函数，并且

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(s)\,ds=0.$$

设$a<b$ 为定数. $h\in L^1(a,b)$, 则

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b h(t)g(\alpha t)\,dt=0.$$

证明　记$G(t)=\int_0^t g(s)\,ds$. 由于$\int_0^T g(s)\,ds=0$, 故G 亦为T 周期函数. 从而G 在$\mathbb{R}$ 上有界. 设$|G(t)|\le C,\forall t\in\mathbb{R}$.

首先假设$h(t)\equiv k$, 我们有

$$\left|\int_a^b kg(\alpha t)\,dt\right|=\left|\frac{k}{\alpha}(G(\alpha b)-G(\alpha a)\right|\le 2|k|\cdot C\cdot|\alpha|^{-1},$$

于是当$h(t)\equiv k$ 时引理成立. 现在我们不难证明引理2 对阶梯函数成立. 于是运用标准的逼近方法可推知，对$\forall h\in L^1(a,b)$, 引理2 成立. ∎

注 1 设$\{\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$ 是一个序列. $\{h_n\}\subset L^1(a,b)$ 是一列函数. $\{\alpha_n\},\{h_n\}$ 满足：当$n\to\infty$ 时,

$$|\alpha_n|\to\infty\qquad 且\quad h_n\to h\quad 于\quad L^1(a,b).$$

则不难证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(t)g(\alpha_n t)\,dt=0.$$

引理 3 设g 和h 满足引理2 的全部条件. 设$v\in C^1[a,b]$ 且$v'(t)\geq\delta>0$ 于$[a,b]$. 则

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b h(t)g(\alpha v(t))\,dt=0.$$

证明 在引理1 中作变换$s=v(t)$. ∎

引理 4 设g,h,v 均与引理3 中的涵义相同. 再设$\{v_n\}\subseteq C^1[a,b]$: $v_n\to v$ 于$C^1[a,b]$;

$$\{\alpha_n\}\subseteq\mathbb{R},\qquad \alpha_n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h(t)g(\alpha_n v_n(t))\,dt=0.$$

证明 固定充分大的n, 使$v'_n\geq\frac{\delta}{2}$. 如同引理3 的证明一样作变换. 然后利用与引理2 的证明类似的论证, 可推知积分变得任意小. ∎

引理 5 设g 与引理2 中的涵义相同. $\{\alpha_n\}\subseteq\mathbb{R},|\alpha_n|\to\infty(n\to\infty)$. 再设$u\in C^1[0,\pi]$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi g(u(t)+\alpha_n\sin t)\,dt=0.$$

证明 不妨假设, 对$\forall n\in\mathbb{N},\alpha_n>0$. 设$\varepsilon:0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. 记$v_n\triangleq\frac{u(t)}{\alpha_n}+\sin t$, 则$v_n\to\sin t$ 于$C^1[0,\pi]$. 据引理4, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} g(\alpha_n v_n(t))dt=0$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} g(\alpha_n v_n(t))\,dt=0.$$

由于

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} g(\alpha_n v_n(t))\,dt\right|\le 2C\varepsilon,$$

其中$C=\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|$. 从而引理5 成立. ∎

引理 6 设$u\in C[0,\pi],g$ 与引理2 中的含义相同. $\{\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$, $|\alpha_n|\to\infty\,(n\to\infty)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(u(t)+\alpha_n\sin t)\,dt=0.$$

证明 由于g是$\mathbb{R}$上的连续周期函数，故g在R'上一致连续. 利用$[0,\pi]$ 上的C^1 函数$\widetilde{u}$ 在sup 范数下逼近u. 因g 在$\mathbb{R}$ 上一致连续，故当$|u-\widetilde{u}|_{C[0,\pi]}$ 充分小时,

$$\left|\int_0^{\pi}[g(u(t)+\alpha_n\sin t)-g(\widetilde{u}(t)+\alpha_n\sin t)]\,dt\right|$$

可以任意小. 再利用引理5 便得结论. ∎

注 2 如果$u_n\to u$ 于$C[0,\pi],\alpha_n\to\infty\,(n\to\infty)$, 则对$\forall\, h\in L^1(0,\pi)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(u_n(t)+\alpha_n\sin\, t)h(t)\,dt=0.$$

最后，我们指出，引理6 在讨论带周期非线性项问题的过程中正起着§4.3 中引理3 及§4.2 中引理1 的作用. 由于当g 为具有周期原函数的连续周期函数时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(u(t)+\alpha_n\sin\, t)\,dt=0$$

及

$$|G(u)| = \left|\int_0^u g(s)\,ds\right| \le CT, \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

故带周期非线性项的问题与强共振问题，在方法上有一定的相似之处.

4.4.2 主要结果

定理 4.4.1 设$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为连续的T 周期函数且$\int_0^T g(s)\,ds = 0$. 设$h \in L^1(0,\pi)$ 满足

$$\int_0^\pi h(t)\sin t\,dt = 0, \tag{4.2}$$

则(4.1) 至少有一个解.

我们将利用变分方法研究(4.1). 设

$$H = W_0^{1,2}(0,\pi) = \left\{ u \in L^2(0,\pi) \,\middle|\, \begin{array}{c} u \in AC[0,\pi], u' \in L^2(0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则H 在内积

$$(u,v)_1 = \int_0^\pi u'(t)v'(t)\,dt$$

下为Hilbert 空间，记$\|u\|_1^2 = (u,u)_1$. 我们早已知道，$H \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\pi]$.

设$G(t)$ 满足：$G'(t) = g(t)$ 及$\int_0^T G(t)\,dt = 0$. 定义$F : H \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}u^2 + G(u) - hu\right] dt.$$

可以证明：$F \in C^1(H,\mathbb{R})$ 且它的Fréchet 导数∇F 为

$$\nabla F(u)v = \int_0^\pi \left[\dot{u}\dot{v} - uv + g(u)v - hv\right] dt, \qquad \forall\, u,\, v \in H.$$

众所周知: $\nabla F(u)=0$ 当且仅当u 为(4.1) 的一个弱解, 从而u 也是(4.1) 在$u\in C^1[0,\pi]$ 及$u'\in AC[0,\pi]$ 意义下的古典解. 下面我们寻找F 的临界点.

将H 分解成$H_0\oplus H_1$. 其中$H_0=\mathrm{span}\{\sin t\}$ 而$H_1=H_0^{\perp}$. 这样$\forall\, u\in H$ 可唯一地分解成$u=\alpha\sin t+u_1$, 其中$\alpha\in I\!R$, $u_1\in H_1$. 记

$$J(u)\triangleq\int_0^\pi[\frac{1}{2}\dot{u}^2-\frac{1}{2}u^2-hu]\,dt \qquad \forall\, u\in H,$$
$$N(u)\triangleq\int_0^\pi G(u)\,dt \qquad \forall\, u\in H,$$

则$F=J+N$.

注意, 因h 满足(4.2), 故对$\forall u=u_1+\alpha\sin t$ 有$J(u)=J(u_1)$, 并且$\nabla J(u)=0$ 当且仅当u 满足

$$\begin{aligned}&-u''-u=h \qquad t\in(0,\pi)\\ &u(0)=u(\pi)=0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

由J 的定义, 不难看出: 存在$\beta,\gamma>0$, 使

$$J(u_1)\ge\beta\|u_1\|_1^2-\gamma\|u_1\|_1, \qquad \forall\, u_1\in H_1.$$

定理4.4.1 的证明 第一步, 证F 有下界.

$$\begin{aligned}\forall u\in H,\quad u=u_1+\alpha\sin t,\quad u_1\in H_1,\\ F(u)=&J(u)+N(u)=J_1(u)+N(u)\\ \ge&\beta\|u_1\|_1^2-\gamma\|u_1\|_1-\pi C_1,\end{aligned}$$

其中

$$C_1=\max_{t\in[0,\pi]}|G(t)|.$$

第二步, 设F 有一个临界点. 设$m^*=\inf_{u\in H}F(u)$. 如果存在$\widetilde{u}\in H$ 使$F(\widetilde{u})=m^*$, 则$\nabla F(\widetilde{u})=0$. 此即$F$ 有一个临界点$\widetilde{u}$. 我们并不

知道F 能否达到其下确界. 但是我们将要证明：如果F 达不到其下确界，则F 必有一个临界值大于m^*.

于是，我们假设

$$F(u) > m^*, \qquad \forall u \in H. \tag{4.4}$$

设$\{u_n\} \subseteq H$ 为F 的一个极小化序列，即

$$F(u_n) \to m^* \qquad (n \to \infty).$$

由此推知：存在常数$C > 0$, 使

$$|J(u_n)| \leq C.$$

进而序列$\{u_{1n}\}$ 在H 中有界(这里$u_n = u_{1n} + \alpha_n \sin t$). 于是我们不妨设$u_{1n} \rightharpoonup \widetilde{u}_1$ 于H ($\rightharpoonup$ 表弱收敛), 故$u_{1n} \to \widetilde{u}_1$ 于$C[0,\pi]$. 因$u_{1n} \rightharpoonup \widetilde{u}_1$ 于H, 故

$$\|\widetilde{u}_1\|_1^2 \leq \varliminf_{n\to\infty} \|u_{1n}\|_1^2.$$

因此$\varliminf_{n\to\infty} J(u_{1n}) \geq J(\widetilde{u}_1)$. 如果$\{\alpha_n\}$ 有界，则我们可以假设$\alpha_n \to \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. 故我们有

$$\begin{aligned} m^* = &\lim_{n\to\infty} F(u_n) \geq J(\widetilde{u}_1) + N(\widetilde{u}_1 + \widetilde{\alpha}\sin t) \\ =&F(\widetilde{u}_1 + \widetilde{\alpha}\sin t) > m^*, \end{aligned}$$

矛盾. 由此知：$\{\alpha_n\}$ 必无界. 据引理6 和注2, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} N(u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi G(u_{1n} + \alpha_n \sin t)\, dt = 0.$$

于是我们有

$$m^* = \lim_{n\to\infty} (J(u_{1n}) + N(u_n)) = \lim_{n\to\infty} J(u_{1n}) \geq J(\widetilde{u}_1).$$

由此，$\forall u \in H, J(\widetilde{u}_1) < F(u)$. 于是

$$J(\widetilde{u}_1) < J(u_1) + N(u_1 + \alpha \sin t)$$

对$\forall u_1 \in H_1$ 及$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 成立. 让$\alpha \to \infty$ 并利用引理6 及海涅定理可得

$$J(\widetilde{u}_1) \le J(u_1), \qquad \forall u_1 \in H_1.$$

于是我们得到

$$\nabla J(\widetilde{u}_1) = 0, \qquad J(\widetilde{u}_1) \le m^*. \tag{4.5}$$

定义$\widetilde{F}: H \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{F}(u) \triangleq F(\widetilde{u}_1 + u).$$

设$\Omega_R = \{u_0 \in H_0 \mid \|u_0\|_1 \le R\}$, 则$u_0 \in \partial\Omega_R$ 当且仅当$u_0 = \pm R\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t$. 设$\varepsilon > 0$ 为任意常数，则存在充分大的R, 使$\forall u \in \partial\Omega_R$, 有

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(u) =& \widetilde{F}\left(\pm R\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t\right) = F\left(\widetilde{u}_1 \pm R\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t\right) \\ \le& m^* + \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.6}$$

可是，在H_1 上$\widetilde{F}$ 一致地大于m^*. 事实上，由第一步可知：$\widetilde{F}$ 在H_1 上弱下半连续且强制，故$\widetilde{F}$ 在H_1 上达到其最小值$\widetilde{F}(\widehat{u})$. 而$\widetilde{F}(\widehat{u}) = F(\widetilde{u}_1 + \widehat{u}) > m^*$. 即

$$\widetilde{F}|_{H_1} \ge \inf_{u_1 \in H_1} \widetilde{F}(u_1) = b > m^*. \tag{4.7}$$

现取$\varepsilon = \frac{1}{2}(b - m^*)$, 由(4.6) 知

$$\widetilde{F}|_{\partial\Omega_R} \le m^* + \varepsilon < b. \tag{4.8}$$

(4.7) 和(4.8) 表明，$\widetilde{F}$ 满足Rabinowitz [76] 中的一个鞍点定理的两个条件. 设

$$\varphi = \{\chi \in C(\overline{\Omega}_R, H) \mid \chi(u) = u,\ u \in \partial\Omega_R\}.$$

令

$$\widetilde{c} = \inf_{\chi\in\varphi} \max_{u\in\Omega_R} \widetilde{F}(\chi(u)), \tag{4.9}$$

则$m^* < b \le \widetilde{c} < \infty$. 若能证明$\widetilde{F}$满足在$\widetilde{c}$的[P.S.] 条件(即. $\forall\{u_n\} \subseteq H$ 满足$\widetilde{F}(u_n) \to \widetilde{c}$ 及$\nabla\widetilde{F}(u_n) \to 0, \{u_n\}$ 中均有收敛子列). 则(4.9) 中定义的$\widetilde{c}$ 即为$\widetilde{F}$ 的一个临界值.

下面证$\widetilde{F}$ 满足在$\widetilde{c}$ 的[P.S.] 条件. 假设$\{u_n\} \subseteq H$ 满足

$$\widetilde{F}(u_n) \to \widetilde{c} \quad 及 \quad \nabla\widetilde{F}(u_n) \to 0, \tag{4.10}$$

则$\{|J(\widetilde{u}_1 + u_{1n})|\}$ 有界. 由此推知$\{\|u_{1n}\|_1\}$ 也有界. 我们不妨假设$u_{1n} \rightharpoonup \widetilde{v}_1$ 于H. 其中$\widetilde{v}_1 \in H_1$. 利用$H_1 \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\pi]$ 的事实可知：$u_{1n} \to \widetilde{v}_1$ 于$C[0,\pi]$.

现在反设$|\alpha_n| \to \infty\,(n \to \infty)$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{c} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{F}(u_n) &= \lim_{n\to\infty} [J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}) \\ &\quad + N(\widetilde{u}_1 + u_{1n} + \alpha_n \sin t)] \\ &= \lim_{n\to\infty} J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}) \ge J(\widetilde{u}_1 + \widetilde{v}_1),\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于对$\forall\, v \in H$,

$$\nabla N(\widetilde{u}_1 + u_{1n} + \alpha_n \sin t)v = \int_0^\pi g(\widetilde{u}_1 + u_{1n} + \alpha_n \sin t)v\, dt. \tag{4.12}$$

据注2, 当$n \to \infty$ 时，$\int_0^\pi g(\widetilde{u}_1 + u_{1n} + \alpha_n \sin t)v\, dt \to 0$. 结合(4.10) 的第二式推知：当$n \to \infty$ 时，$\nabla J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}) \to 0$, 进而

$$\nabla J(\widetilde{u}_1 + \widetilde{v}_1) = 0.$$

但因J 在H_1 中仅有一个临界点$\widetilde{u}_1$，故$\widetilde{v}_1 \equiv 0$. 据J 的凸性我们有

$$J(\widetilde{u}_1) \geq J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}) - (\nabla J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}), u_{1n}).$$

由此推知

$$J(\widetilde{u}_1) \geq \lim_{n\to\infty} J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}).$$

结合(4.11), (4.9) 和(4.5), 得

$$\widetilde{c} = \lim_{n\to\infty} J(\widetilde{u}_1 + u_{1n}) \leq J(\widetilde{u}_1) \leq m^* < \widetilde{c}.$$

矛盾！这表明$\{\alpha_n\}$ 必有界，从而$\{u_n\} = \{u_{1n} + \alpha_n \sin t\}$ 在H 中有界. 至此，我们可用普通的方法推出$\{u_n\}$ 中有收敛子列. ▮

§ 4.5 椭圆方程 • 周期非线性项 • 没有 [P.S.] 的环绕理论

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界正则区域，$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为$-\Delta$ 在$H_0^1(\Omega)$ 上的特征值列，M_k 为λ_k 所对应的特征子空间. 设$\widehat{h} \in L^2(\Omega), g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个具有周期原函数的连续周期函数. 本节讨论问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_k u &= g(u) + \widehat{h} \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

的可解性.

在§4.4 中，我们曾在$n = k = 1$ 时，讨论过问题(5.1) 的可解性. 本节的目的是将§4.4 中的变分技巧发展到高维及高特征值的情形. 由于(5.1) 所对应的泛函不满足[P.S.] 条件，我们将利用近似鞍点定理及引进[P.S.]$'$ 条件来建立存在性结果. 在论证过程中，我们是利用含参紧向量场的解集连通理论来建立不同维link 产生的不同类集族之间的普遍联系的.

下面的定理4.5.1 是由Solimin 在文[30] 中首先得到的.

定理 4.5.1 设g 满足条件

(g*) g 是具有周期原函数的连续周期函数;

设λ_k 是单重的, λ_k 所对应的特征函数为φ; 再设$\widehat{h} \in L^2(\Omega)$ 满足$\int_\Omega \widehat{h}\varphi dx = 0$, 则(5.1) 至少有一个解.

[117] 推广了定理4.5.1, 去掉了λ_k 单重的假设. 得到如下结果

定理 4.5.2 设g 满足(g*); $\widehat{h} \in L^2(\Omega)$ 满足$\int_\Omega \widehat{h}\psi\, dx = 0, \forall \psi \in M_k$. 则(5.1) 至少有一个解.

本节后面的部分, 4.5.1 和4.5.2 介绍预备结果; 4.5.3 致力于定理4.5.1 的证明; 在4.5.4 中将给出定理4.5.2 的证明梗概.

4.5.1 预备引理

引理 1 设g 满足(g*). U 是一个由定义在Ω 上的可测函数构成的在测度收敛意义下准紧的集合. $\psi \in C^1(\Omega), \nabla \psi \neq 0$ a.e. 于Ω, 则

$$w - \lim_{|\alpha| \to \infty} g(u + \alpha\psi) = 0 \tag{5.2}$$

于$L^p(\Omega), (\forall p \in [1, \infty))$, 对$u \in U$ 一致成立.

进而, 我们有

(i) $\lim_{|\alpha|\to\infty} \int_\Omega G(u + \alpha\psi) = 0$ 对$u \in U$ 一致; (5.3)

(ii) $\lim_{|\alpha|\to\infty} g(u + \alpha\psi) = 0$ 于$H^{-1}(\Omega)$ 对$u \in U$ 一致. (5.4)

在给出引理1 的证明之前, 我们先陈述三个基础结果.

引理 2 设g 满足(g*); $a, b \in \mathbb{R} : a < b$. 则当$|\alpha| \to \infty$ 时, $g(\alpha, \cdot)$ 在$L^\infty(a, b)$ 中弱* 收敛于零.

证明 可仿§4.4 的引理2 的证明给出. ∎

从引理2 我们有

引理 3 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界开集. 设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

再设$v\in C^0(\overline{\Omega})$. 则

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_\Omega v(x)g(\alpha x_1)\,dx=0. \tag{5.5}$$

证明　自然只要证明Ω 为由$[a,b]$ 的笛卡儿积构成的n 维方体的特殊情形就够了！这时，据引理2 可知，对于固定的$(x_2,x_3,\cdots,x_n)$, 有

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b v(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(\alpha x_1)\,dx_1=0. \tag{5.6}$$

又由$v(\cdot,x_2,\cdots,x_n)$ 在$C^0(\overline{\Omega})$ 中的强紧性，可知(5.6) 对$(\cdot,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$ 一致成立. 分别对变量$x_2,\cdots,x_n$ 积分(5.6) 两边，即得(5.5). ∎

引理 4　设$v\in C^0(\overline{\Omega}),u\in C^1(\overline{\Omega}),\psi\in C^1(\overline{\Omega}),\frac{\partial\psi}{\partial x_1}>\delta>0$ 于Ω. 则

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_\Omega v(x)g(u+\alpha\psi)\,dx=0. \tag{5.7}$$

证明　对充分大的α, 我们有

$$\frac{\partial(\alpha^{-1}u+\psi)}{\partial x_1}>\frac{\delta}{2},$$

作变换 $y_1=(\alpha^{-1}u+\psi)(x)$

$$y_k=x_k,\qquad k=2,3,\cdots,n.$$

然后利用引理3 便可推得. ∎

引理 1 的证明　固定$\psi\in C^1(\Omega)$ 使$\nabla\psi\neq 0$ a.e. 于Ω. 任意给定$\varepsilon>0$. 则存在正数$\delta>0$, 使$|\nabla\psi|>2\delta$ 对$\forall x\in\Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ 成立. 其中Ω_ε 是Ω 的一个测度小于ε 的闭子集. 我们可以把$\Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ 分解成有限个子区域的并集，使得$\nabla\psi$ 在每个子区域上的振幅小于δ. 再在每个

子区域上运用引理4. 综合上述，对固定的$v \in C^0(\overline{\Omega}), u \in C^1(\overline{\Omega})$，我们有

$$\left| \lim_{|\alpha| \to +\infty} \int_\Omega v(x) g(u + \alpha\psi)\, dx \right| \le \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |g| \cdot \sup |v|, \tag{5.8}$$

由ε 的任意性，(5.8) 左端等于0.

为了完成引理1 的证明，我们必须进一步推得：当$v \in L^{p'}(\Omega)$，$p' = (\frac{p}{p-1})$，而u 在一个由定义在Ω 上的可测函数构成的准紧集U 上变动时，

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_\Omega v(x) g(u + \alpha\psi)\, dx = 0 \qquad \text{一致}. \tag{5.9}$$

现在利用$C^0(\overline{\Omega})$ 在$L^{p'}(\Omega)$ 中稠的事实及g 的一致连续性，可以推得(5.9). ▮

引理 5 设g 满足(g_0), U_0 是一个由Ω 上的可测函数组成的集合，U_0 在测度收敛意义下准紧；$V \subset C^1(\overline{\Omega})$ 是一个k 维子空间，$\forall \psi \in V \backslash \{0\}$, $\nabla\psi \ne 0$ a.e. 于Ω. 记

$$S = \{u \in V \mid |||u||| = 1\}, \qquad \text{而} \quad |||u||| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

则$\lim_{|\alpha| \to \infty} \int_\Omega G(u + \alpha\psi)\, dx = 0$ 对$u \in U_0$ 及$\psi \in S$ 一致成立. 其中$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$.

证明　利用引理1 及有限覆盖定理. ▮

4.5.2 不同类集族间的联系

设E 是一个Hilbert 空间，它的范数和内积分别记成$\|\cdot\|$ 和$(\cdot,\cdot)$. 设$\{e_n\}_1^\infty$ 为E 的一个标准正交基. 记$E_n = \text{span}\,\{e_1, \cdots, e_n\}$. 设$P_n : E \to E_n$ 为直交投影，而$Q = Id - P_n$. 以B_n 表示中心在原点半径为r 的球.

设$H_n = \{\eta : E \to E \mid \eta$ 连续且$\eta(u) = u, \forall u \in \partial B_n\}$.

$$\mathcal{A}_n^1 = \{A \subset E \mid \exists \eta \in H, \text{ 使 } A = \eta(\overline{B}_n)\},$$
$$\mathcal{A}_n^2 = \{A \subset E \mid A \text{ 是紧集}, \forall \eta \in H_n, \text{ 都有 } \eta(A) \cap E_n^{\perp} \neq \emptyset\}.$$

显然，$\mathcal{A}_n^1 \subset \mathcal{A}_n^2$. 令$c_n^i = \inf_{A \in \mathcal{A}_n^i} \sup_A I\ (I \in C^1(E, I\!R))$, 则$c_n^2 \le c_n^1$.

本小节的主要目的是证明$\mathcal{A}_n^i$ 的如下的性质

定理 4.5.3 设$l < n, A \in \mathcal{A}_n^1$, 则

$$A \cap \{e_{n-l+1}, \cdots, e_n\}^{\perp} \in \mathcal{A}_{n-l}^2.$$

证明 我们只对$l = 2$ 的情形给出证明. $l > 2$ 的情形同理可证. $l = 1$ 的情形见[30, Prop 3.2].

设$\overline{\eta} \in H_n$, 使$\overline{\eta}(\overline{B}_n) = A$. 记$f = \overline{\eta}|_{\overline{B}_n}$. 再设

$$U_1 = \{u \in E \mid (u, e_n) > 0\},$$
$$U_2 = \{u \in E \mid (u, e_n) < 0\},$$
$$U_3 = \{u \in E \mid (u, e_{n-1}) > 0\},$$
$$U_4 = \{u \in E \mid (u, e_{n-1}) < 0\}.$$

我们有

$$A \cap \{e_n, e_{n-1}\}^{\perp} = f\big(\overline{B}_n \backslash f^{-1}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4)\big),$$

记

$$\partial_1 B_n = \{u \in \partial B_n \mid (u, e_n) > 0\},$$
$$\partial_2 B_n = \{u \in \partial B_n \mid (u, e_n) < 0\},$$
$$\partial_3 B_n = \{u \in \partial B_n \mid (u, e_{n-1}) > 0\},$$
$$\partial_4 B_n = \{u \in \partial B_n \mid (u, e_{n-1} < 0\}.$$

因为$f = Id$ 于∂B_n, 故

$$\partial_i B_n = \partial B_n \cap f^{-1}(U_i), \qquad i = 1,2,3,4.$$

为了证明$A \cap \{e_n, e_{n-1}\}^\perp \in \mathcal{A}^2_{n-2}$, 对$\forall \eta \in H_{n-2}$, 我们只需得到

$$\eta(f(\overline{B}_n \backslash f^{-1}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4))) \cap E^\perp_{n-2} \neq \phi$$

就行了.

考虑集合

$$D \triangleq B_{n-2} \dot{+} \{\alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n \in E \mid \|\alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n\| < r\},$$

作变换$v = P_{n-2}u, w = u - v$, 则$u \in D$ 是指$\|u\| < r$ 且$\|w\| < r$; 而$u \in B_n$ 是指$\|v\|^2 + \|w\|^2 < r^2$. 定义映象$\xi : D \to B_n, \xi : v + w \to v + (\frac{\sqrt{r^2 - \|v\|^2}}{r})w$. 易证$\xi : D \to B_n$ 是一个同胚，这就使我们能给$\overline{D}$ 上赋以$\overline{B}_n$ 上的相应值. 记

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{u \in \overline{D} \mid (u, e_n) > 0,\ \|v\| < r,\ \|w\| = r\},\\
D_2 &= \{u \in \overline{D} \mid (u, e_n) < 0,\ \|v\| < r,\ \|w\| = r\},\\
D_3 &= \{u \in \overline{D} \mid (u, e_{n-1}) > 0,\ \|v\| < r,\ \|w\| = r\},\\
D_4 &= \{u \in \overline{D} \mid (u, e_{n-1}) < 0,\ \|v\| < r,\ \|w\| = r\},\\
D_5 &= \{u = v + w \in \overline{D} \mid \|v\| = r\},
\end{aligned}$$

则$\xi : D_i \to \partial_i B_n, i = 1,2,3,4.$ $\xi : D_5 \to \partial B_{n-2}$.

事实上，当$u = v + \alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n \in D_1$ 时，有$(u, e_n) > 0$. 因$\xi(u) = v + \frac{\sqrt{r^2 - \|\nu\|^2}}{r}(\alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n)$, $(\xi(u), e_n) = \frac{\sqrt{r^2 - \|\nu\|^2}}{r}\alpha_n > 0$. 故$\xi(u) \in U_1$. 再因$\|\xi(u)\| = \sqrt{\|v\|^2 + \frac{r^2 - \|v\|^2}{r^2}\|w\|^2} = r$, 故$\xi(u) \in \partial B_n$. 从而$\xi : D_1 \to \partial_1 B_n$. 同理，$\xi : D_i \to \partial_i B_n, i = 2,3,4.$

当$u=v+w\in D_5$ 时，$\xi(u)=v+\frac{\sqrt{r^2-\|v\|^2}}{r}w=v$, 又由$D_5$ 的定义知，$\|v\|=r$. 由此，$\xi(u)\in\partial B_{n-2}$.

因为$\eta\in H_{n-2}, f=Id$ 于$\partial B_{n-2}\subset\partial B_n$, 故当$u=v+w\in D_5$ 时，就有

$$\eta(f(\xi(u)))=v.$$

由此，对于任意 $w\in\{\alpha_{n-1}e_{n-1}+\alpha_n e_n\in E_n \mid \|\alpha_{n-1}e_{n-1}+\alpha_n e_n\| < r\}$,

$$\deg(P_{n-2}\circ\eta\circ f\circ\xi(\cdot+w), B_{n-2}, 0)=1.$$

记φ 为满足$P_{n-2}\circ\eta\circ f\circ\xi(v+\alpha_n e_n+e_{n-1}\alpha_{n-1})=0$ 的$((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)$ 的全体,

$$\begin{aligned}
\varphi_n^+ &=\{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid \alpha_n>0,\ \alpha_n^2+\alpha_{n-1}^2=r^2\},\\
\varphi_n^- &=\{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid \alpha_n<0,\ \alpha_n^2+\alpha_{n-1}^2=r^2\},\\
\varphi_{n-1}^+ &=\{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid \alpha_{n-1}>0,\ \alpha_n^2+\alpha_{n-1}^2=r^2\},\\
\varphi_{n-1}^+ &=\{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid \alpha_{n-1}<0,\ \alpha_n^2+\alpha_{n-1}^2=r^2\},
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
C_n = \{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid & v+\alpha_{n-1}e_{n-1}\\
&+\alpha_n e_n\in\xi^{-1}(\overline{B}_n\backslash f^{-1}(U_1\cup U_2))\},\\
C_{n-1} = \{((\alpha_n,\alpha_{n-1}),v)\in\varphi \mid & v+\alpha_{n-1}e_{n-1}\\
&+\alpha_n e_n\in\xi^{-1}(\overline{B}_n\backslash f^{-1}(U_3\cup U_4))\},
\end{aligned}$$

则C_n 在φ 中分离φ_n^+ 与φ_n^-, C_{n-1} 在φ 中分离φ_{n-1}^+ 和φ_{n-1}^-. 从而满足定理1.6.6 的全部条件，故$C_n\cap C_{n-1}\neq\emptyset$. 即存在$((\overline{\alpha}_n,\overline{\alpha}_{n-1}),\overline{v})\in C_n\cap C_{n-1}$，使$P_{n-2}\circ\eta\circ f\circ\xi(\overline{v}+\overline{\alpha}_{n-1}e_{n-1}+\overline{\alpha}_n e_n)=0$. 记$\overline{u}=\overline{v}+\overline{\alpha}_{n-1}e_{n-1}+\overline{\alpha}_n e_n$, 则

$$\overline{u}\in\xi^{-1}(\overline{B}_n\backslash f^{-1}(U_1\cup U_2\cup U_3\cup U_4)).$$

令$u=\eta(f(\xi(\overline{u})))$, 则$u\in\eta(A\cap\{e_n,e_{n-1}\}^{\perp})\cap E_{n-2}^{\perp}$. ∎

4.5.3 定理 4.5.1 的证明

取$E=H_0^1(\Omega)$. 定义泛函$J,I\in C^1(E,I\!R)$

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2-\lambda_k|u|^2\right)dx-\int_{\Omega}\widehat{h}u\,dx, \tag{5.10}$$

$$I(u)=J(u)+\int_{\Omega}G(u)\,dx, \tag{5.11}$$

设$\{e_n^{\infty}\}$是$-\Delta$ 在$H_0^1(\Omega)$上的特征函数构成的完全正交基，且$\{e_n\}_1^{\infty}$的下标满足：$\exists\, h\in I\!N$, 使λ_k 所对应的特征函数$\varphi\in I\!R\cdot e_h$, 同时e_n所对应的特征值小于λ_k 当且仅当$n<h$.

因$\int_{\Omega}\widehat{h}\varphi dx=0$, 故方程

$$-\Delta u-\lambda_k u=\widehat{h} \tag{5.12}$$

在E 中有解. 设$\overline{u}$ 为(5.12) 的一个解. 则由于J 在$\overline{u}+E_{h-1}$ 上凹且$\nabla J(\overline{u})=0$, 故

$$J(\overline{u})=\max_{\overline{u}+E_{h-1}}J(u). \tag{5.13}$$

泛函I 在$\overline{u}+E_{h-1}^{\perp}$ 上有下界m, 而在E_{h-1} 上以平方速度趋于$-\infty$. 因此，我们能取到$\overline{r}>0$, 使

$$\sup_{\partial B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})}I<\inf_{\overline{u}+E_{h-1}^{\perp}}I. \tag{5.14}$$

又因u 在e_h 上的分量的变化，仅引起I 的有界的变化，故由(5.14)直接推知

$$\sup_{\partial B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})\dot{+}I\!R\cdot e_h}I<\inf_{\overline{u}+E_{h-1}^{\perp}}I. \tag{5.15}$$

不难看出，I 和J 均不满足[P.S.] 条件. 我们将要证明，I 和J 实际上满足如下[P.S.]$'$ 条件.

定义 1 设$\widehat{I}\in C^1(E,\mathbb{R})$, 称$\widehat{I}$ 满足[P.S.]$'$ 条件是指: $\forall\{u_n\}\subseteq E$ 满足:

(i) (u_n,e_h) 有界.

(ii) $\nabla\widehat{I}(u_n)\to 0$ 于E', (5.16)

$\{u_n\}$ 便有收敛子列.

引理 6 I 和J 在$(-\infty,+\infty)\backslash\{J\overline{u}\}$ 上满足$[\mathrm{P.S.}]_c$ 条件. (即对$\forall c\in(-\infty,+\infty)\backslash\{J\overline{u}\}$ 及$\forall\{u_n\}\subset E$: $\widehat{I}(u_n)\to c$ 且$\nabla\widehat{I}(u_n)\to 0$ 于$E',\{u_n\}$ 有收敛子列).

进一步, I 和J 满足[P.S.]$'$ 条件.

证明 显然, 我们只需对I 证明结论成立就够了. 因此, 假设$\nabla I(u_n)\to 0$ 同时将u_n 分解成$u_n=v_n+w_n$, 这里$v_n=(u_n,e_n)e_h$. 记P 为E 到$\{e_h\}^{\perp}$ 上的直交投影, 则$\exists\varepsilon_n:\varepsilon_n\perp e_h$, 使

$$-\Delta w_n-\lambda_k w_n=Pg(u_n)+\widehat{h}+\varepsilon_n, \tag{5.17}$$

而$\varepsilon_n\to 0$ 于H^{-1}. 因$\varepsilon_n\perp e_h$, 故方程

$$-\Delta z_n-\lambda_k z_n=\varepsilon_n,\qquad z_n\perp e_h \tag{5.18}$$

可解. 记其解为z_n.

由于λ_k 不是$-\Delta$ 在$\{e_h\}^{\perp}$ 上的特征值, 又$\{w_n\}\subseteq\{e_h\}^{\perp}$, 故$\{w_n\}$ 在E 中有界. 从(5.17) 和(5.18) 不难看出, $\{w_n-z_n-p\overline{u}\}$ 实际上在$W^{2,p}(\Omega)(\forall p)$ 中有界, 进而可以假设它在E 中收敛. 因$z_n\to 0$, 故w_n 收敛于某个$w\in E$.

由此可知: 如果$\{v_n\}$ 有界, 则$[\mathrm{P.S.}]_c$ 条件成立. 特别地[P.S.]$'$ 条件也成立. 下面我们仅需证明: 如果$\{v_n\}$ 无界, 则$J(u_n)\to J(\overline{u})$. 为此设$|\alpha_n|=|(u_n,e_h)|\to\infty$, 利用引理1 的(5.4) 式推得: $g(u_n)=g(w_n+\alpha_n e_h)\to 0$ 于$H^{-1}(\Omega)$.

因此在(5.17) 两边取极限, 得

$$-\Delta w-\lambda_k w=\widehat{h}. \tag{5.19}$$

即$w=P\overline{u}$. 最后，通过在(5.10) 中取极限我们得到

$$I(u_n)=J(w_n)+\int_\Omega G(w_n+\alpha_n e_n)\,dx\to J(w)=J(\overline{u}). \quad (5.20)$$

∎

现在固定$\overline{r}$, 使(5.14) 成立. 以B_{h-1} 简记$B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})$. 我们沿用$\mathcal{A}_{h-1}^i$ 表示由$B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})$, 产生的集族，而$c_{h-1}^i=\inf_{A\in\mathcal{A}_{h-1}^i}\sup_A I$.

利用定理1.8.8 可以直接推出如下.

命题 1 如果$c_{h-1}^i\neq J(\overline{u})$, 则$c_{h-1}^i$ 是I 的临界值. $i=1,2$.

因此为了证明I 有临界值，我们可以假设$c_{h-1}^2=J(\overline{u})$. 现固定$\overline{\alpha}\in I\!R^+$, 考察

$$c(\overline{\alpha})=\sup_{u\in B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})} I(u+\overline{\alpha}e_h). \quad (5.21)$$

我们有

命题 2

$$\lim_{\alpha\to\infty} c(\alpha)=J(\overline{u}). \quad (5.22)$$

证明 由引理 1 (i), 易见$I(u+\alpha e_h)\to J(u)$ 对u 一致成立. 再利用(5.13) 便可推出要证. ∎

给定$\alpha\in I\!R^+$. 令$C(\alpha)=B_{h-1}(\overline{u},\overline{r})\dot{+}(-\alpha,\alpha)e_h$. 设

$$s(\alpha)=\sup_{\partial C(\alpha)} I. \quad (5.23)$$

命题 3 如果$c_{h-1}^2\leq J(\overline{u})$, 则当$\alpha$ 充分大时，有

$$s(\alpha)=c(\alpha). \quad (5.24)$$

证明 由c_{n-1}^2 的定义，有$\inf_{\overline{u}+E_{h-1}^\perp} I\leq c_{h-1}^2$. 再从(5.15) 和命题2 推知(5.24) 成立. ∎

现在我们可以给出定理4.5.1 的证明.

定理4.5.1 的证明　我们只需证明I 有临界点. 如果$c^2_{h-1} \neq J(\overline{u})$, 则由命题1, I 有临界值.

如果$c^2_{h-1} = J(\overline{u})$, 则命题3 的条件被满足. 取定$\alpha$, 并记$c^1_h(\alpha)$ 为以$C(\alpha)$ 代替B_h 后作出的可能临界值c^1_h. 如果存在α, 使$c^1_h(\alpha) > s(\alpha)$, 则因

$$J(\overline{u}) = c^2_{h-1} = \inf_{A\in\mathcal{A}^2_{h-1}} \sup_A I \leq \sup_{\partial C(\alpha)} I = s(\alpha) < c^1_h(\alpha),$$

故I 在$c^1_h(\alpha)$ 满足$[\mathrm{P.S.}]_c$ 条件. 据命题 1, $c^1_h(\alpha)$ 即为I 的一个临界值. 由此我们可以假设$c^1_h(\alpha) \leq s(\alpha), \forall\alpha$. 则存在$A_n \in \mathcal{A}^1_h(C(n))$ 使

$$\sup_{A_n} I < s(n) + \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in I\!N. \tag{5.25}$$

据定理4.5.3 和(5.25) 式, 可知: $A_n \cap e^{\perp}_n \in \mathcal{A}^2_{h-1}$ 及

$$\lim_n \sup_{A_n\cap e^{\perp}_h} I \leq \lim_n s(n) = \lim_n c(n) = c^2_{h-1}. \tag{5.26}$$

另一方面, 据C^2_{h-1} 的定义

$$\sup_{A_n\cap e^{\perp}_h} I \geq c^2_{h-1}, \tag{5.27}$$

故若记$B_n = A_n \cap e^{\perp}_h$, 则有

$$\lim_n \sup_{B_n} I = C^2_{h-1}.$$

由定理1.8.8, 我们可得到一个满足$[\mathrm{P.S.}]'$ 条件的序列. 这个序列的收敛子列的极限点即为I 的一个临界点. ∎

4.5.4 定理 4.5.2 的证明

仍记$E=H_0^1(\Omega).I,J\in C^1(E)$ 定义成

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\lambda_k|u|^2\right)dx-\int_\Omega\widehat{h}u\,dx \tag{5.28}$$

$$I(u)=J(u)+\int_\Omega G(u)\,dx, \tag{5.29}$$

由于$\widehat{h}\perp M_k$, 因此方程

$$-\Delta u-\lambda_k u=\widehat{h} \tag{5.30}$$

在E 中有解$\overline{u}$.

记$h=\sum_{i=1}^{k-1}\dim M_i, l=\dim M_k$ 记$E_h=M_1\oplus\cdots\oplus M_{k-1}$. 由于$J$ 在$\overline{u}+E_h$ 上凹且$\nabla J(\overline{u})=0$, 故

$$J(\overline{u})=\max_{\overline{u}+E_h}J(u). \tag{5.31}$$

由于I 在$\overline{u}+E_h^\perp$ 上有下界m 并且在$\overline{u}+E_h$ 上以平方速度趋于$-\infty$, 因此，我们能找到$\overline{\gamma}>0$, 使

$$\sup_{\partial B_h(\overline{u},\overline{\gamma})}I<\inf_{\overline{u}+E_h^\perp}I. \tag{5.32}$$

因u 在M_k 上的分量在决定I 的值时仅引起一个有界变化，故从(5.32), 我们得

$$\sup_{\partial B_h(\overline{u},\overline{\gamma})\dot{+}M_k}I<\inf_{\overline{u}+E_h^\perp}I. \tag{5.33}$$

我们将定义1 中的[P.S.]′ 推广为如下

定义 2 设$\widehat{I}\in C^1(E,\mathbb{R})$, 称$I'$ 满足[P.S.]^l 条件是指：$\forall\{u_n\}\subseteq E$ 满足

(i) $(u_n,\varphi_k^{(j)})$ 有界，其中$\varphi_k^{(j)}\in M_k\,(j=1,\cdots,l)$ 为M_k 的基底,

(ii) $\nabla\widetilde{I}(u_n)\to 0$ 于E'.

$\{u_n\}$ 中便有收敛子列.

类似于引理6 并利用引理5, 可得

引理 7 I 和J 在$(-\infty,+\infty)\backslash\{J(\overline{u})\}$ 上满足$[\mathrm{P.S.}]_c$ 条件.

进一步, I 和J 满足$[\mathrm{P.S.}]^l$ 条件. 取定$\overline{\gamma}$ 使得(5.32) 成立. 以B_h 简记$B_h(\overline{u},\overline{r})$. 考察与$B_h(\overline{u},\overline{r})$ 相对应的$\mathcal{A}_h^i$ 和c_h^i.

由引理7 和定理1.8.8, 我们立即推得:

命题 1′ 如果$c_h^i\neq J(\overline{u})$, 则$c_h^i$ 是I 的临界值$i=1,2$.

为了证明I 有临界点. 不妨假设$c_h^2=J(\overline{u})$. 对于$\overline{\alpha}\in\mathbb{R}^+$. 令

$$c(\overline{\alpha})=\sup_{\substack{\psi\in S\\ u\in B_h(\overline{u},\overline{r})}} I(u+\overline{\alpha}\psi), \tag{5.34}$$

其中$S=\{u\in M_k\mid |||u|||=1\}$. 我们有

命题 2′ $\lim_{\alpha\to+\infty}c(\alpha)=J(\overline{u})$. (5.35)

再作集合$C(\alpha)=B_h(\overline{u},\overline{r})\dot{+}[0,\alpha]S$. 以$C(\alpha)$ 充当B_{h+l}. 设

$$s(\alpha)=\sup_{\Delta} I,$$

其中

$$\Delta=(\partial B_h(\overline{u},\overline{r})\dot{+}[0,\alpha)\cdot S)\cup(B_h(\overline{u},\overline{r})\dot{+}\{\alpha\}\cdot S).$$

命题 3′ 如果$c_h^2\leq J(\overline{u})$, 则对充分大的$\alpha$, 有

$$s(\alpha)\leq c(\alpha).$$

定理4.5.2 的证明 只需证I 有临界点.

如果$c_h^2\neq J(\overline{u})$, 则命题1′ 表明$I$ 有一个临界值c_h^2.

如果$c_h^2=J(\overline{u})$, 则命题3′ 的条件被满足. 记$c_{h+l}^1(\alpha)$ 为用$C(\alpha)$ 充当B_{h+l} 时相应的c_{h+l}^1. 如果存在α, 使$c_{h+l}^1>s(\alpha)$, 则仿定理4.5.1

的证明可推得. c^1_{h+l} 即为I 的一个临界值. 如果$c^1_{h+l} \le s(\alpha)$ 对 $\forall\alpha \in I\!R^+$ 成立, 则由c^1_{h+l} 的定义, 存在$A_n \in \mathcal{A}^1_{l+h}(C(n))$, 使

$$\sup_{A_n} I < s(n) + \frac{1}{n} \tag{5.36}$$

用与定理4.5.1 的证明完全类似的办法, 可推得: 存在$\{u_n\} \subset E$, 使

(i) $\lim_n d(u_n, A_n \cap M_k^\perp) = 0$ (d 表距离);

(ii) $\lim_n \nabla I(u_n) = 0$;

(iii) $\lim_n I(u_n) = c_h^2$.

由(i) 知, $(u_n, \varphi_k^{(j)})$ 有界($\forall\varphi_k^{(j)} \in M_k, j = 1, \cdots, l$). 根据引理7, I 满足$[\text{P.S.}]^l$ 条件, 故$\{u_n\}$ 中有子列, 该子列的极限点便是I 的一个临界点. ∎

注 不难看出, 定理4.5.1 和4.5.2 中的条件(g*): “g 为具有周期原函数的连续周期函数可以换成条件

(SR) g 连续且

$$\lim_{s\to\pm\infty} g(s) = \lim_{s\to\pm\infty} G(s) = 0. \tag{5.37}$$

这样我们便得到关于强共振问题的如下结果.

定理 4.5.4 设g 满足条件(5.37), 又$\widehat{h} \in L^2(\Omega)$ 满足$\widehat{h} \perp M_k$, 则问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda_k u + g(u) = \widehat{h} &\qquad x \in \Omega \\ u = 0 &\qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

至少有一个解. ∎

附注 IV

1. 张恭庆和刘嘉荃[112] 利用上积长(Cuplength) 来估计强共振问题所对应泛函的临界点的个数的下界.

2. Copozzi, Lupo 和Solimini [110] 利用Morse 理论及临界值的 minimax 特征，讨论一类强共振问题非平凡解的存在性.

第五章　特征线问题及其扰动

本章我们介绍广义特征值问题

$$\begin{aligned} -u'' - \mu u^+ + vu^- &= 0 \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{0.1}$$

(其中$u^+ = \frac{|u|+u}{2}$, $u^- = \frac{|u|-u}{2}$) 的Fŭcik 谱理论及两参数特征值问题

$$\begin{aligned} &\frac{d^4y}{dx^4} = \mu y - \nu\frac{d^2y}{dx^2} \\ &y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

的广义谱理论. 由于问题(0.1) 或(0.2) 中均有两个参数, 因而使(0.1) 或(0.2) 有非平凡解的数对(μ, ν) 的全体一般构成平面$I\!R^2$ 上的曲线(族). 我们将这样的曲线称为特征线, 进而将(0.1) 或(0.2) 也称为特征线问题.

与此同时, 也讨论不跨特征线扰动问题和带跨特征线扰动的问题的可解性. 这里的不少结果是第二章和第三章中一些结果的推广.

§ 5.1　Fŭcik 谱的定义

我们稍抽象地引入Fčcik 广义谱.

5.1.1 假设和记号

设X, Y, Z 为Banach 空间.

(i) 假设C 为Y 中的一个固定锥并且满足

(Y1) C 中有半序$x \le y$, 使对$\forall y \in Y$, 有

$$y^+ = \max\{y, 0\} \in C, \qquad y^- = \max\{-y, 0\} \in C;$$

(Y2) 映象$y \longmapsto y^+$ 是连续的;

(Y3) $X \hookrightarrow Y$.

(ii) 设$a > 0$ 为一个定数.

(iii) 假设$J : X \to Z$ 是一个具有下列性质的映象

(J1) J 是正a 齐的，即

$$u \in X, t > 0 \Longrightarrow J(tu) \ge t^a Ju;$$

(J2) J 是X 到Z 上的同胚;

(J3) J 是奇的，即$J(-u) = -J(u), \forall u \in X$.

(iv) 假设$S : Y \to Z$ 是一个具有下列性质的映象:

(S1) S 是正a 齐的奇映象;

(S2) S 连续;

(S3) 映象$u \longmapsto Su^+, u \longmapsto Su^-$ 均为从X 到Z 的全连续映象.

(v) 设$G : X \to Z$ 是一个全连续映象.

(vi) μ 和ν 均为实参数.

现在，设$T_{(u,v)} : X \to Z$ 定义为

$$T_{(\mu,\nu)} : u \longmapsto \mu S u^+ - \nu S u^-, u \in X.$$

对于映象$T_{(\mu,\nu)}$, 我们引进下列集合

$$A_{-1} = \{(\mu,\nu) \in I\!R^2 \mid \exists u_0 \ne \theta_X, \quad 使 \quad Ju_0 - T_{(\mu,v)}u_0 = \theta_Z\},$$

$$A_0 = I\!R^2 \backslash A_{-1},$$

$$A_1 = \{(\mu,\nu) \in A_0 \mid \deg[z - T_{(\mu,v)}(J^{-1}z), B_z(1), \theta_z] \ne 0\},$$

其中

$$B_z(r)=\{z\in Z \mid \|z\|_z<r\},\qquad r>0,$$
$$A_2=\{(\mu,\nu)\in A_0 \mid \mathrm{Im}[J-T_{(\mu,\nu)}]\neq Z\},$$
$$A_3=\{(\mu,\nu)\in I\!R^2 \mid \mathrm{Im}[J-T_{(\mu,\nu)}]=Z\}.$$

5.1.2 集合 $A_i(i=-1,0,1,2,3)$ 的性质

引理 1 对$i=-1,0,1,2,3$,

$$(\mu,\nu)\in A_i \Longleftrightarrow (\nu,\mu)\in A_i. \tag{1.1}$$

证明 $i=-1,0,2,3$ 时显真. 当$i=1$ 时的证明参见[14, 引理 40.3].

∎

引理 2 设$(\alpha,\beta)\in I\!R^2$,

$$C_1(\alpha,\beta)=\sup_{\|u\|_X=1}\|T_{(\alpha,\beta)}u\|_Z$$
$$s=\max\left\{\sup_{\|u\|_X=1}\|Su^+\|_Z,\sup_{\|u\|_X=1}\|Su^-\|_Z\right\},$$

则

$$C_1(\alpha,\beta)\le(|\alpha|+|\beta|)s. \tag{1.2}$$

特别地，有

(i) $C_1(\alpha,\beta)<\infty$;

(ii) $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(0,0)} C_1(\alpha,\beta)=0$;

(iii) $u\in X \Longrightarrow \|T_{(\alpha,\beta)}u\|_Z\le C_1(\alpha,\beta)\|u\|_X^{\alpha}$.

证明

$$\begin{aligned}C_1(\alpha,\beta)=&\sup_{\|u\|_X=1}\|T_{(\alpha,\beta)}u\|_Z\\ \le&|\alpha|\sup_{\|u\|_X=1}\|Su^+\|_Z+|\beta|\sup_{\|u\|_X=1}\|Su^-\|_Z\\ \le&(|\alpha|+|\beta|)s.\end{aligned}$$

据假设(S_3) 可知，$s \in \mathbb{R}^1$ 为有限数，故(i), (ii) 成立.

现设$u \in X$, $u \neq \theta_Z$, 于是(S_1) 蕴含

$$\|T_{(\alpha,\beta)}u\|_Z = \left\|\alpha S\left(\|u\|_X \cdot \frac{u}{\|u\|_X}\right)^+ - \beta S\left(\|u\|_X \frac{u}{\|u\|_X}\right)^-\right\|$$

$$= \|u\|_X^a \|T_{(\alpha,\beta)}(\frac{u}{\|u\|_X})\|_Z \leq C_1(\alpha,\beta)\|u\|_X^a.$$

即(iii) 成立. ∎

引理 3 (A_0 的性质)

(i) $(\mu,\nu) \in A_0 \Longrightarrow C_2(\mu,\nu) = \inf_{\|u\|_X=1} \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z > 0$;

(ii) $(\mu,\nu) \in A_0, u \in X \Longrightarrow \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z \geq C_2(\mu,\nu)\|u\|_X^a$;

(iii) 对$(\mu,\nu) \in A_0$, 集合$\mathrm{Im}[J - T_{(\mu,\nu)}]$ 是Z 中的闭集;

(iv) 若$(\mu,\nu) \in A_0, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ 满足

$$|\alpha| + |\beta| \leq \frac{1}{s}C_2(\mu,\nu). \tag{1.3}$$

则$(\mu+\alpha, \nu+\beta) \in A_0$;

(v) A_0 是$\mathbb{R}^2$ 的一个开子集.

证明

(i) 反设$C_2(\mu,\nu) = 0$, 则存在一个序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \|u_n\|_X = 1$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \|Ju_n - T_{(\mu,\nu)}u_n\|_Z = 0.$$

因算子S 满足(S_3) 又J 是一个同胚(参(J2)). 故存在$\{u_n\}$ 的子列$\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 及$u_0 \in X$, 使当$k \to \infty$, 有

$$T_{(\mu,\nu)}u_{n_k} \to Ju_0 \quad 于 \quad Z.$$

于是

$$Ju_{n_k} \to Ju_0 \quad 于 \quad Z, \qquad 而 \quad u_{n_k} \to u_0 \quad 于 \quad X;$$

因此我们有

$$\|u_0\|_X = 1, \quad Ju_0 - T_{(\mu,v)}u_0 = \theta_Z,$$

这与$(\mu, v) \in A_0$ 的事实相矛盾！

(ii) 类似于引理2 (iii) 的证明；

(iii) 假设

$$Ju_n - T_{(\mu,v)}u_n = z_n,$$

并且

$$z_n \to z_0 \text{ 于 } Z.$$

下证$z_0 \in \operatorname{Im}[J - T_{(\mu,\nu)}]$. 从$C_2(\mu,\nu)\|u_n\|_X^a \le \|z_n\|_Z$ 推知，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在X 中有界. 于是存在$\{u_n\}$ 的子列$\{u_{n_k}\}$ 及$u_0 \in X$, 使

$$T_{(\mu,\nu)}u_{n_k} \to Ju_0 - z_0 \qquad \text{于} \quad Z.$$

由此推知

$$Ju_{n_k} \to Ju_0 \qquad \text{于} \quad Z,$$

并且

$$u_{n_k} \to u_0 \quad \text{于} \quad X, \qquad Ju_0 - T_{(\mu,v)}u_0 = z_0.$$

(iv) 从假设(1.3) 我们有

$$C_1(\alpha,\beta) < C_2(\mu,\nu),$$

于是

$$\begin{aligned}\|Ju - T_{(\mu+\alpha,\nu+\beta)}u\|_Z \ge & \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z - \|T_{(\alpha,\beta)}u\|_Z \\ \ge & (C_2(\mu,\nu) - C_1(\mu,\nu))\|u\|_X^a,\end{aligned}$$

进而$(\mu+\alpha, \nu+\beta) \in A_0$;

(v) 由(vi) 立即推得. ∎

引理 4 (A_1 的性质)

(i) $A_1 \subsetneq A_3$;

(ii) A_1 是$\mathbb{R}^2$ 中的开子集;

(iii) A_1 是A_0 的一定的连通分支的并集;

(iv) 如果T 是A_0 的一个包含点$(\lambda,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ 的连通分支, 则 $T \subseteq A_1$;

(v) 若$(\lambda,\lambda) \in A_0, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ 满足

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{1}{s} C_2(\lambda,\lambda),$$

则$(\lambda+\alpha, \lambda+\beta) \in A_1$;

(vi) 设$(\mu,\nu) \in A_1$, 假设

$$\limsup_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\|Gu\|_Z}{\|u\|_X^a} < C_2(\mu,\nu),$$

则

$$\mathrm{Im}[J - T_{(\mu,\nu)} + G] = Z.$$

证明

(i) 取$(\mu,\nu) \in A_1$. 设$\zeta \in Z$ 是一个任意固定的元素. 我们只要证得

$$z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z) = \zeta \tag{1.4}$$

在Z 中可解就行了.

据引理3 的结论(ii), 存在$\rho > 0$, 使

$$\|z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z)\|_z > \|\zeta\|_Z$$

对$\forall z \in Z : \|z\|_Z = \rho$ 成立. 由此可知

$$\begin{aligned}
&\deg(z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z) - \zeta;\ K_Z(\rho),\ \theta_Z) \\
=&\deg(z - T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z);\ K_Z(\rho),\ \theta_Z) \\
=&\deg(z - T_{(\mu,v)}(J^{-1}z);\ K_Z(1),\ \theta_Z) \neq 0,
\end{aligned}$$

从而可知(1.4) 可解.

(ii) 由Leray-Schauder 度的同伦不变性立即推得.

(iii) 显然成立.

(iv) 对$(\lambda,\lambda)\in A_0$, 映象

$$z\longmapsto T_{(\lambda,\lambda)}(J^{-1}z),\qquad z\in Z$$

是奇的, 故由Borsuk 定理,

$$\deg\left(z-T_{(\lambda,\lambda)}(J^{-1}z);\ B_Z(1),\theta_Z\right)$$

是奇数(不为0). 于是$(\lambda,\lambda)\in A_1$. 据(iii) $T\subseteq A_1$.

(v) 由(iv) 的结论及引理3 的结论(iv) 立即推得.

(vi) 设$\zeta\in Z$, 欲证

$$Ju-T_{(\mu,v)}u+G(u)=\zeta$$

可解. 为此, 只需证得存在$\rho>0$, 使对$\forall z\in Z:\|z\|_Z=\rho$, 有

$$\|z-T_{(\mu,v)}J^{-1}z+G(J^{-1}z)\|_Z>\|\zeta\|_Z \tag{1.5}$$

就够了(剩下的借助Leray-Schaucer 度的同伦不变性便可推出). 利用题设, 不难找到正数$\varepsilon>0$ 及$\rho>0$, 使

$$\|z-T_{(\mu,\nu)}(J^{-1}z)\|_Z-C_2(\mu,\ \nu)\|J^{-1}z\|_X^a+\varepsilon\|J^{-1}z\|_X^a>\|\zeta\|_Z$$

对$\forall z\in Z:\|z\|_z=\rho$ 成立. 这便推得(1.5) 式. ∎

引理 5 (A_2 的性质)

(i) 对$(\mu,\nu)\in A_2$, 存在$C_3(\mu,\nu)>0$ 满足

$$\limsup_{\|u\|_X\to\infty}\frac{\|Gu\|_z}{\|u\|_X^a}<C_3(\mu,\nu),$$

则

$$\operatorname{Im}[J - T_{(\mu,\nu)} + G] \neq Z.$$

(ii) 若$(\mu, \nu) \in A_2, (\alpha, \beta) \in I\!R^2$ 满足

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{1}{s} C_3(\mu, \nu),$$

则

$$(\mu + \alpha, \nu + \beta) \in A_2.$$

(iii) A_2 是$I\!R^2$ 中的开集

证明

(i) 存在$\zeta \in Z : \|\zeta\|_z = 1$ 使

$$Ju - T_{(\mu,\nu)} u \neq \zeta,$$

对$\forall u \in X$ 成立. 据引理3 的结论(iii), $\operatorname{Im}[J - T_{(\mu,\nu)}]$ 是Z 中的一个闭集，从而有

$$\inf_{u \in X} \|Ju - T_{(\mu,\nu)} u - \zeta\|_z = 2\varepsilon > 0.$$

记

$$C_3(\mu, \nu) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} C_2(\mu, \nu),$$

选取$r > 0$ 充分大，使

$$\|Gu\|_Z < C_3(\mu, \nu) \|u\|_X^a$$

对$\forall \in X : \|u\| \geq r$ 成立.

由于映象$J - T_{(\mu,v)} + G$ 将X 的有界集映成Z 中的有界集，故存在$b > 0$ 满足：若对$\eta \in Z : \|\eta\|_Z = 1$ 及$t > b$, 有

$$Ju - T_{(\mu,\nu)} u + Gu = t\eta,$$

则

$$\|u\|_Z \geq r.$$

下面证明：若

$$\eta \in Z: \quad \|\eta\|_Z = 1, \quad \|\eta - \zeta\|_Z \leq \varepsilon, \qquad t > b,$$

则

$$t\eta \notin \operatorname{Im}[J - T_{(\mu,v)} + G].$$

反设存在$u \in X$, 使

$$Ju - T_{(\mu,v)}u + Gu = t\eta.$$

于是由引理3 的结论(ii)

$$\begin{aligned} t =& \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u + Gu\| \geq \|Ju - T_{(\mu,\nu)}u\|_Z - \|Gu\|_Z \\ \geq& C_2(\mu,\nu)\|u\|_X^a - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}C_2(\mu,\nu)\|u\|_X^a \\ =& \frac{C_2(\mu,\nu)}{\varepsilon+1}\|u\|_X^a. \end{aligned} \tag{1.6}$$

进一步

$$\begin{aligned} t\varepsilon =& 2t\varepsilon - t\varepsilon \\ \leq& t\|\zeta - J(\frac{u}{t^{\frac{1}{a}}}) + T_{(\mu,v)}(\frac{u}{t^{\frac{1}{a}}})\|_Z - t\|\zeta - \eta\|_Z \\ =& \|t\zeta - Ju + T_{(\mu,\nu)}u\|_Z - t\|\zeta - \eta\|_Z \\ \leq& \|t\eta - Ju + T_{(\mu,\nu)}u\|_Z = \|Gu\|_Z \\ <& \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}C_2(\mu,\nu)\|u\|_X^a. \end{aligned} \tag{1.7}$$

从(1.6) 和(1.7) 可以推出

$$t\varepsilon < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}C_2(\mu,\nu)\|u\|_X^a \leq t\varepsilon,$$

矛盾！

(ii) 只需在(i) 中取$Gu = T_{(\alpha,\beta)}u$.

(iii) 由(ii) 立即推得. ∎

5.1.3 Fŭick 广义谱

为了讨论非线性边值问题

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) - \mu v^+(x) + vu^-(x) - g(u(x)) = f(x), \qquad x \in (0,\pi) \\
&u(0) = u(\pi) = 0
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

(其中$\mu, \nu \in \mathbb{R}^1, g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 是一个有界连续函数，$f \in L^1(0,\pi)$)的可解性，从5.1.1 和5.1.2 我们已经看到研究广义特征值问题

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) - \mu u^+(x) + \nu u^-(x) = 0, \qquad x \in (0,\pi) \\
&u(0) = u(\pi) = 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

的非平凡解的存在性是非常重要的. 若取

$$
\begin{aligned}
&X = Y = Z = W_0^{1,2}(0,\pi) \\
&C = \{u \in X \mid u(x) \geq 0 \text{ 于 } [0,\pi]\},
\end{aligned}
$$

而算子J, S, G 分别定义为

$$
\begin{aligned}
\langle Ju, v\rangle_{w_0^{1,2}(0,\pi)} &= \int_0^\pi u'(x)v'(x)\,dx, \\
\langle Su, v\rangle_{w_0^{1,2}(0,\pi)} &= \int_0^\pi u(x)v(x)\,dx, \\
\langle Gu, v\rangle_{w_0^{1,2}(0,\pi)} &= -\int_0^\pi g(u(x))v(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

$\forall u, v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$. 不难看出，5.1.1 中的全部假设均被满足.

下面，我们主要刻画A_{-1}. A_{-1} 即使(1.9) 有非平凡解的参数对(μ,ν) 的全体构成的集合.

定理 5.1.1 边值问题(1.9) 有非平凡解的充要条件是下列条件之一成立

(i) $\nu=1,\mu$ 是任意的;

(ii) ν 是任意的, $\mu=1$;

(iii) $\mu>1,\ \nu>1,\ \frac{\nu^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}}\in \mathbb{N}$;

(iv) $\mu>1,\ \nu>1,\ \frac{\nu^{\frac{1}{2}}(\mu^{\frac{1}{2}}-1)}{\mu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}}\in \mathbb{N}$;

(v) $\mu>1,\ \nu>1,\ \frac{\mu^{\frac{1}{2}}(\nu^{\frac{1}{2}}-1)}{\mu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}}\in \mathbb{N}$.

证明 设$u_0\in W_0^{1,2}(0,\pi)$ 为(1.9) 的一个非平凡弱解. 由正则性理论, 可以假定$u_0\in C^2([0,\pi])$ 并且u_0 是(1.9) 的一个非平凡古典解. 据常微分方程解对初始值的唯一性定理, u_0 在区间$(0,\pi)$ 内仅有有限个零点. 若u_0 在$(0,\pi)$ 内没有零点, 则我们得到(i) 和(ii). 若u_0 在$(0,\pi)$ 内仅有一个零点, 则在u_0 取正值的那个子区间上: $\exists A>0,\ a\in \mathbb{R}^1$, 使$u_0(x)$ 与$A\sin\mu^{\frac{1}{2}}(x-a)$ 重合; 而在u_0 取负值的另一个子区间上: $\exists B<0, b\in \mathbb{R}^1$, 使$u_0(x)$ 与$B\sin\nu^{\frac{1}{2}}(x-b)$ 重合. 故有

$$\frac{\pi}{\mu^{\frac{1}{2}}}+\frac{\pi}{\nu^{\frac{1}{2}}}=\pi,$$

即$\frac{\mu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}}=1$. 完全类似, 若$u_0$ 在$(0,\pi)$ 内有m 个零点. 当$m=2k-1$ 时, 这$2k-1$ 个零点将$(0,\pi)$ 分成$2k$ 个子区间, 故有$k(\nu^{-\frac{1}{2}}+\mu^{-\frac{1}{2}})=1$, 此即(iii). 当$m=2k$ 时, 这$2k$ 个零点将$(0,\pi)$ 分成$2k+1$ 个子区间. 如果u_0 在$k+1$ 个子区间上取正值而在其余k 个子区间上取负值, 则$k(\nu^{-\frac{1}{2}}+\mu^{-\frac{1}{2}})+\mu^{-\frac{1}{2}}=1$, 此即(iv); 如果$u_0$ 在k 个子区间上取正值而在其余$k+1$ 个子区间上取负值, 则$k(\nu^{-\frac{1}{2}}+\mu^{-\frac{1}{2}})+\nu^{-\frac{1}{2}}=1$, 此即(v).

反过来, 如果(i) $\sim$ (v) 中的任何一条被满足, 则不难用上述思想构造出(1.9) 的非平凡解u_0 来, 即(1.9) 确有非平凡解. ∎

现在设$T>0,\ \alpha\triangleq\frac{\pi}{T}$. 用定理5.1.1 的证明思想, 不难建立如

下结果.

定理5.1.2 设$(\mu,\nu)\in I\!R^2$, 则非线性边值问题

$$
\begin{aligned}
-u''-\lambda_+u^++\lambda_-u^-=0 \qquad & x\in(0,T)\\
u(0)=u(T)=0 \qquad &
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

有非平凡解的充要条件为

$$(\lambda_+,\,\lambda_-)\in C_0^*\cup\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\cup C_k^*)\right],$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_0^* =&\{(\mu,\nu)\in I\!R^2 \mid (\mu-\alpha^2)(\nu-\alpha^2)=0\},\\
C_k =&\left\{(\mu,\nu)\in I\!R^2 \mid \mu>k^2\alpha^2,\,\nu>0,\,\nu^{\frac{1}{2}}=\frac{k\alpha\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}-k\alpha}\right\},\\
C_k^* =&\left\{(\mu,\nu)\in I\!R^2 \mid \mu>k^2\alpha^2,\,\nu>0,\,\nu^{\frac{1}{2}}=\frac{(k+1)\alpha\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}-k\alpha}\right\}\\
&\cup\left\{(\mu,\nu)\in I\!R^2 \mid \mu>(k+1)^2\alpha^2,\,\nu>0,\,\nu^{\frac{1}{2}}=\frac{k\alpha\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}-(k+1)\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

证明(梗概) 设$u_0\neq 0$ 为(1.10) 的非平凡解, 则u_0 在$[0,T]$ 内仅有有限个零点: $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$. 若$u_0|_{[t_j,\,t_{j+1}]}>0$, 则$u_0\,|_{[t_j,\,t_{j+1}]}=A_j\sin\lambda_+^{\frac{1}{2}}(t-t_j)$ 且$t_{j+1}-t_j=\frac{\pi}{\lambda_+^{\frac{1}{2}}}$; 若$u_0\,|_{[t_j,t_{j+1}]}<0$, 则$u_0\,|_{[t_j,t_{j+1}]}=-\overline{A}_j\sin\lambda_-^{\frac{1}{2}}(t-t_j)$, 并且$t_{j+1}-t_j=\frac{\pi}{\lambda_-^{\frac{1}{2}}}$. $(A_j,\,\overline{A}_j>0)$. 由此可知, 存在非负整数n_+,n_- 使

$$T=n_+\pi\lambda_+^{-\frac{1}{2}}+n_-\pi\lambda_-^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.11}$$

且$|n_+-n_-|=0$ 或1. 当$n_+=n_-=k\geq 1$ 时, $(\lambda_+,\lambda_-)\in C_k$; 在“$n_+=1$ 且$n_-=0$” 及“$n_+=0$ 且$n_-=1$” 的情形下$(\lambda_+,\lambda_-)\in C_0^*$;

在"$n_+ = k$ 而$n_- = k+1$" 及"$n_+ = k+1$ 而$n_- = k$" 的情形下$(\lambda_+, \lambda_-) \in C_k^*, (k \geq 1)$. 于是证得必要性.

若$(\lambda_+, \lambda_-) \in C_0^* \cup [\bigcup_{k=1,\infty}(c_k \cup c_k^*)]$, 则不难利用上述思想构造出(1.10) 的一个非平凡解来. ∎

注 1 记$C_0 \triangleq \{(\mu, \nu) \in I\!R^2 \mid \mu\nu = 0\}$. 取$\alpha = \frac{1}{2}$, 并将$(\mu^{\frac{1}{2}}, \nu^{\frac{1}{2}})$看作$(\mu, \nu)$. 便可描绘出下图(其中$C_k$ 为实线, C_k^* 为虚线, $k \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0$).

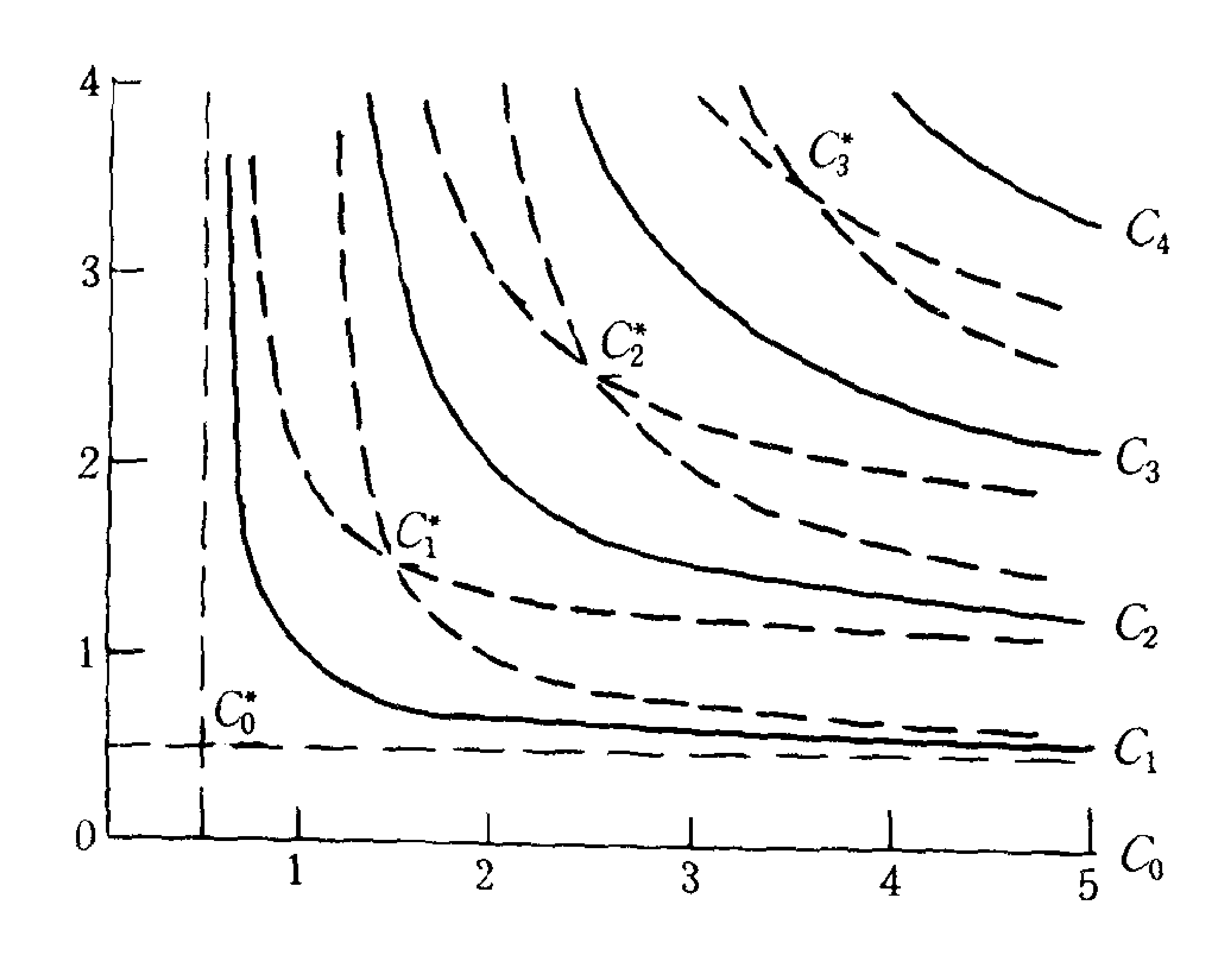


图 5.1.1

现在给出Fūcik 谱的定义.

定义 1 我们称$C_0^* \cup [\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k \cup C_k^*)]$ 为广义特征问题(1.10) 的Fūcik 谱.

下面给出广义特征值问题在有界扰动下的一个存在性结果.

定理 5.1.3 设$\pi = \{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu < 1,\ \nu < 1\}$

$$\cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(\mu,\ \nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu^{\frac{1}{2}} > k+1, w_k(\mu^{\frac{1}{2}}) < \nu^{\frac{1}{2}} < \eta_{k+1}(\mu^{\frac{1}{2}})\}$$

$$\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(\mu,\ \nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu^{\frac{1}{2}} > k, \eta_k(\mu^{\frac{1}{2}}) < \nu^{\frac{1}{2}} < \widetilde{\theta}_k(\mu^{\frac{1}{2}})\},$$

其中

$$\widetilde{\theta}_k(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(k+1)\tau}{\tau - k}, & \tau \in (k, 2k+1] \\ \dfrac{k\tau}{\tau-(k+1)}, & \tau \in (2k+1, \infty), \end{cases}$$

$$w_k(\tau) = \begin{cases} \dfrac{k\tau}{\tau-(k+1)}, & \tau \in (k+1, 2k+1] \\ \dfrac{(k+1)\tau}{\tau - k}, & \tau \in (2k+1, \infty), \end{cases}$$

$$\eta_k(\tau) = \frac{k\tau}{\tau - k}, \quad \tau \in (k, \infty).$$

如果$(\mu,\ \nu) \in \pi, f \in L^1(0,\pi), g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ 连续有界，则(1.8) 至少有一个弱解$u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$.

证明　据引理4 的结论(iv), $\pi \subseteq A_1$. 于是结论由引理4 的结论(vi) 立即推得. ∎

考虑周期边值问题

$$\begin{aligned} & -u'' - \mu u^+ + \nu u^- - g(u) = f \qquad x \in (0, 2\pi) \\ & u(0) = u(2\pi), \qquad u'(0) = u'(2\pi) \end{aligned} \tag{1.12}$$

的可解性. 其中$f \in C[0,2\pi]$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为连续有界函数. 利用 5.1.2 的理论，我们不难得到如下结果.

定理 5.1.4 记

$$\Gamma = \{(\mu,\ \nu) \in R^2 \mid \mu < 0,\ \nu < 0\}$$

$$\cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(\mu,\ \nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu^{\frac{1}{2}} > \frac{k}{2}, \phi_k(\mu^{\frac{1}{2}}) < \nu^{\frac{1}{2}} < \phi_{k+1}(\mu^{\frac{1}{2}})\},$$

其中

$$\phi_k(\tau)=\frac{k\tau}{2\tau-k},\qquad \tau\in\left(\frac{k}{2},\ \infty\right).$$

设 $(\mu,\varphi)\in\Gamma, f\in C[0,2\pi], g$ 为连续有界函数，则(1.12) 至少有一个解.

证明　在5.1.2 中，取

$$X=\{u\in C^2[0,2\pi]\mid u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\},$$
$$Y=Z=C[0,2\pi],$$
$$C=\{u\in Z\mid u(x)\geq 0,x\in[0,2\pi]\},$$
$$J:u\longmapsto -u'',$$
$$S:u\longmapsto u,$$
$$G:u\to g(u(x)).$$

∎

5.1.4 几点补充

(I) 考虑四阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{d^4u}{dx^4}-\mu u^+(x)+\nu u^-(x)=0\qquad x\in[0,\pi)\\&u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(\pi)=0,\end{aligned}\tag{1.13}$$

若取

$$X=\{u\in C^4[0,\pi]\mid u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(\pi)=0\},$$
$$\|u\|_X=\|u\|_{C^4[0,\pi]},$$
$$Z=Y=C[0,\pi]$$
$$C=\{y\in C[0,\pi]\mid y(x)\geq 0,x\in[0,\pi]\},$$
$$J:u\longmapsto\frac{d^4u}{dx^4},$$
$$S:u\longmapsto u.$$

显然5.1.1 和5.1.2 的所有假设均满足．但不幸的是，人们还未能象5.1.3 中那样给出A_{-1} 的精确刻划．

(II) 寻找所有$(\mu, \nu) \in I\!R^2$, 使椭圆边值

$$\begin{aligned} -\Delta u - \mu u^+ + \nu u^- &= 0 \qquad 于\ \Omega \\ u &= 0 \qquad 于\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.14}$$

有非平凡解的问题也是一个十分有趣而艰难的问题，即便Ω 是非常特殊的区域：如n 维方体，或球体等．

§ 5.2 Liénerd 方程 PBVP • 不跨特征线扰动 Leray-Schauder 度理论

设$e \in L^1(0,T)$, $c \in I\!R, f : [0,T] \times I\!R \to I\!R$ 满足Carathéodory条件．本节的主要目的是讨论Lienard 型常微分方程边值问题

$$u'' + cu' + f(t,u) = e(t) \qquad \text{a.e 于} \quad [0,T] \tag{2.1}$$

$$u(T) - u(0) = 0, \qquad u'(T) - u'(0) = 0 \tag{2.2}$$

的可解性．定理的主要条件是借助Fŭcik 广义谱给出的．扰动项不跨越(1.10) 的特征线．

5.2.1 一个重要引理

定理5.1.2 告诉我们，非线性两点边值问题

$$-u'' - \lambda_+ u^+ + \lambda_- u^- = 0, \qquad x \in (0,T) \tag{2.3}$$

$$u(0) = u(T) = 0 \tag{2.4}$$

没有非平凡解的充要条件是

$$(\lambda_+, \lambda_-) \notin C_0^* \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k \cup C_k^*)\right].$$

(C_i^*, C_j 定义参见定理5.1.2). 现在考虑与(2.3)-(2.4) 相对应的变系数问题

$$-u'' - g_+(t)u^+ + g_-(t)u^- = 0, \qquad t \in (0, T) \tag{2.5}$$

$$u(0) = u(T) = 0 \tag{2.6}$$

"特殊" 非平凡解的不存在性. 我们建立如下重要引理. 它是联系 Dirichlet 两点边值问题与周期边值问题的桥梁.

引理 1 设$g_\pm \in L^\infty(0, T)$. 假设下列条件之一成立:

(H_1) 存在整数$i \geq 0$ 及两点$(\lambda_{+,i}, \lambda_{-,i}) \in C_i, (\lambda_{+,i+1}, \lambda_{-,i+1}) \in C_{i+1}$ ($\lambda_{\pm,0} > 0$) 及实数$\varepsilon > 0$ 使

$$\lambda_{\pm,i} + \varepsilon \leq g_\pm(t) \leq \lambda_{\pm,i+1} - \varepsilon \qquad \text{a.e.} \quad t \in [0, T]. \tag{2.7}$$

(H_2) 存在实数$\varepsilon > 0$, 使

$$g_\pm(t) \leq -\varepsilon, \tag{2.8}$$

则非线性Dirichlet 问题(2.5)-(2.6) 不存在满足条件

$$\operatorname{sign} u'(0) = \operatorname{sign} u'(T) \tag{2.9}$$

的非平凡解.

证明 (沿用定理5.1.2 的记号)

在假设(H_2) 下结论显然真.

现设(H1) 成立. 当$i \geq 1$ 时, 设u 为(2.5)-(2.6) 的一个非平凡解. 则由(2.5) 在$[0, T]$ 上对初值问题解的唯一性可知, u 在$[0, T]$ 上仅有有限个零点. 设$I_+(I_-)$ 是u 的任意两个相邻零点间的开子区间, $u|_{I_+} > 0, (u|_{I_-} < 0)$. 记$a_\pm = \pi\lambda_{\pm,i+1}^{-\frac{1}{2}}$, $b_\pm = \pi\lambda_{\pm,i}^{-\frac{1}{2}}$. 我们先证明

$$a_\pm < \operatorname{meas}(I_\pm) < b_\pm. \tag{2.10}$$

反设不然，比如说对某I_+ 有：meas $I_+ \geq b_+$ (其余三种情况可类似地处理). 记$I_+ = (\alpha, \beta)$. 由于u 是如下Sturm-Liouville 问题

$$\begin{aligned} -u'' - g_+(u) = 0 \qquad & t \in (\alpha, \beta) \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{aligned}$$

对应于第一特征值1 的非负解. 另一方面，1 又是

$$\begin{aligned} -u'' - (\frac{\pi}{\beta - \alpha})^2 u = 0 \qquad & t \in (\alpha, \beta) \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{aligned}$$

的第一个特征值. 故由Strum-Liouville 边值问题第一特征值的变分表示

$$\begin{aligned} 1 = & \sup \int_\alpha^\beta g_+(t)|w(t)|^2\, dt \\ = & \sup \int_\alpha^\beta (\frac{\pi}{\beta - \alpha})^2 |w(t)|^2\, dt \\ = & (\frac{\pi}{\beta - \alpha})^2 \sup \int_\alpha^\beta |w(t)|^2\, dt, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中$w \in \{v \in W_0^{1,2}(\alpha, \beta) \mid \int_\alpha^\beta |v'(t)|^2 dt = 1\}$. 对$\forall w \in \{v \in W_0^{1,2}(\alpha, \beta) \mid \int_\alpha^\beta |v'(t)|^2 dt = 1\}$，由题设(2.7) 及假设$\beta - \alpha \geq b_+$ 推知

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta g_+(t)|w(t)|^2 dt \geq & \int_\alpha^\beta (\lambda_{+,i} + \varepsilon)|w(t)|^2\, dt \\ \geq & \int_\alpha^\beta \left(\frac{b_+}{\beta - \alpha}\right)^2 \lambda_{+,i}|w(t)|^2 dt + \varepsilon \int_\alpha^\beta |w(t)|^2\, dt \\ = & \int_\alpha^\beta \left(\frac{\pi}{\beta - \alpha}\right)^2 |w(t)|^2 dt + \varepsilon \int_\alpha^\beta |w(t)|^2\, dt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

结合(2.11) 和(2.12), 我们得

$$1 \geq 1 + \varepsilon \left(\frac{\beta - \alpha}{\pi}\right)^2,$$

矛盾. 故(2.10) 成立.

现在，利用(1.11) 式，我们有

$$T = (i+1)(a_+ + a_-) = i(b_+ + b_-). \tag{2.13}$$

(注意：因$(\lambda_{+,i}, \lambda_{-,i}) \in C_i$, 故(1.11) 中的$n_+ = n_- = i$). 从(2.10) 和(2.13) 可推出：$u$ 的零点将$(0,T)$ 分成奇数个互不相交的开子区间. 事实上，反设这类开子区间的个数$m = 2p$. 则当$p \leq i$ 时，由(2.10) 可知$T < p(b_+ + b_-)$; 当$p \geq i+1$ 时，再由(2.10), 可知$T > p(a_+ + a_-)$. 二者均与(2.13) 矛盾. 故$\text{sign}\, u'(0) \neq \text{sign} u'(T)$ 成立.

当$i = 0$, 因$\lambda_{\pm,0} \geq 0$, 我们可以重复上述论证过程. 即若$u \neq 0$ 是(2.5)–(2.6) 的非平凡解，则$a_\pm < \text{meas}(I_\pm)$ 同时$a_+ + a_- = T$. 故u 在$(0,T)$ 上不变号，即(2.9) 不能成立. ∎

注 1 设Δ_d 为$\mathbb{R}^2$ 的第d 闭象限. 考察矩形

$$\mathcal{R}_g \triangleq \left[\text{essinf}\, g_+, \text{esssup}\, g_+\right] \times \left[\text{essinf}\, g_-, \text{esssup}\, g_-\right],$$

则(H_1) 等价于$\mathcal{R}_g \subset \Delta_1 \backslash (\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k)$, 而$(\text{H}_3)$ 等价于$\mathcal{R}_g \subset \Delta_3 \backslash C_0$.

5.2.2 存在性定理

考虑T- 周期边值问题

$$u'' + cu' + f(t,u) = e(t) \qquad \text{a.e. 于} \quad [0,T] \tag{2.14}$$

$$u(T) - u(0) = 0, \qquad u'(T) - u'(0) = 0 \tag{2.15}$$

的可解性. 其中$c\in I\!R^1, e\in X\triangleq L^1(0,T), f:[0,T]\times I\!R\to I\!R$ 满足Carathéodory 条件及增长性条件：存在$p_1\in X, p_2\in I\!R, p_2\geq 0$, 使

$$|f(t,s)|\leq p_1(t)+p_2|s|,\quad \forall s\in I\!R,\ \text{a.e. } t\in[0,T]. \tag{2.16}$$

进一步，假设存在数$r_\pm\leq s_\pm$, 使

$$r_\pm\leq\liminf_{s\to\pm\infty}\frac{f(t,s)}{s}\leq\limsup_{t\to\pm\infty}\frac{f(t,s)}{s}\leq s_\pm \tag{2.17}$$

对a.e. $t\in[0,T]$ 成立.

定理 5.2.1[122] 设

$$[r_+,s_+]\times[r_-,s_-]\subseteq(\Delta_1\cup\Delta_3)\backslash\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k \tag{2.18}$$

及

$$[r_+-\frac{c^2}{4},s_+-\frac{c^2}{4}]\times[r_--\frac{c^2}{4},s_--\frac{c^2}{4}]\subseteq(\Delta_1\cup\Delta_3)\backslash\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k, \tag{2.19}$$

则(2.14)–(2.15) 至少有一个解.

注 2 u 为(2.14)–(2.15) 的一个解是指$u\in C^1[0,T], u'\in AC[0,T]$ 且u 满足(2.14)–(2.15).

定理5.2.1 的证明 固定$\lambda\in(0,(\frac{2\pi}{T})^2)$ 及常数对$(c_+,c_-)\in[r_+,s_+]\times[r_-,s_-]$. 我们知道：对于$\forall w\in X$, 线性周期边值问题

$$u''+cu'+\lambda u=w$$
$$u(T)-u(0)=0,\qquad u'(T)-u'(0)=0$$

有唯一解，记之为Kw. 则$K:X\to X, K:w\to Kw$ 是一个全连续线性算子. 因f 的Nemytskii 算子及映象$u\longmapsto u^\pm$ 均为X 到X 的连续映象且将有界集映成有界集，故映象

$$H:[0,1]\times X\to X$$
$$H(\tau,u)\triangleq u-K(-\tau[f(\cdot,u)-e]-(1-\tau)[c_+u^+-c_-u^-]+\lambda u)$$

是一个由恒同映象全连续扰动后得到的同伦映象. 由Leray-Schauder延拓定理，为证定理5.2.1, 只需证明如下两点：

(d_1) $\exists R>0$, 使当$(\tau,u)\in[0,1]\times X$ 满足$H(\tau,u)=0$ 时，有$\|u\|<R$ $\quad$ ($\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_X$).

(d_2) $\deg_{L-S}(H(0,\cdot),B_R,0)\neq 0$. 其中$B_R=\{u\in X\mid \|u\|<R\}$.

先证(d_1). 反设不然. 即存在序列$\{(\tau_n,u_n)\}\subseteq[0,1]\times X$ 使得$H(\tau_n,u_n)=0$ 并且$\|u_n\|>n,\forall n\in I\!N$. 记$v_n\triangleq\frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则

$$v_n=K(-\tau_n\left[\frac{f(\cdot,u_n)}{\|u_n\|}-\frac{e}{\|u_n\|}\right]-(1-\tau_n)[c_+v_n^+-c_-v_n^-]+\lambda v_n). \tag{2.20}$$

据(2.16), 序列$f_n\triangleq\frac{f(\cdot,u_n)}{\|u_n\|}$ 在X 中有界. 因此通过选取一个子列，我们可以假定v_n 在$[0,T]$ 上一致收敛于v 且$f_n\rightharpoonup g$ 于X (这里$\rightharpoonup$ 表序列的弱收敛). 自然我们可以假定$\tau_n\to\tau$. 因X 是一个Banach 空间，故$X\to X$ 的任何线性有界映象既连续又弱连续. 现在通过在(2.20) 两边取弱极限，可得

$$v=k(-\tau g-(1-\tau)[c_+v^+-c_-v^-]+\lambda v). \tag{2.21}$$

记

$$V_0\triangleq\{t\in[0,T]\mid v(t)=0\},$$
$$V_+\triangleq\{t\in[0,T]\mid v(t)>0\},$$
$$V_-\triangleq\{t\in[0,T]\mid v(t)<0\}.$$

并定义$h_\pm:[0,T]\to I\!R$

$$h_+(t)=\begin{cases}\dfrac{g(t)}{v(t)} & t\in V_+\\ c_+ & t\in[0,T]\backslash V_+,\end{cases}$$
$$h_-(t)=\begin{cases}\dfrac{g(t)}{v(t)} & t\in V_-\\ c_- & t\in[0,T]\backslash V_-.\end{cases}$$

我们将证明:

$$g(t) = h_+(t)v^+(t) - h_-(t)v^-(t) \qquad \text{a.e.} \quad t \in [0,T], \tag{2.22}$$

并且

$$r_\pm \le h_\pm(t) \le s_\pm \qquad \text{a.e.} \quad t \in [0,T]. \tag{2.23}$$

请注意, 如果(2.22) 和(2.23) 均成立, 则$v : \|v\| = 1$ 是如下周期边值问题

$$v'' + cv' + \gamma_+(t)v^+ - \gamma_-(t)v^- = 0 \quad \text{a.e. 于 } [0,T] \tag{2.24}$$

$$v(T) - v(0) = 0, \qquad v'(T) - v'(0) = 0 \tag{2.25}$$

的一个解. 其中$\gamma_\pm \triangleq \tau h_\pm(t) + (1-\tau)c_\pm$ 满足

$$r_\pm \le \gamma_\pm(t) \le s_\pm. \tag{2.26}$$

现在证(2.22). 由于对a.e. $t \in [0,T]$, 有

$$|f_n(t)| \le \frac{|p_1(t)|}{\|u_n\|} + p_2|v_n(t)| \to p_2|v(t)|.$$

故当$n \to \infty$ 时, $f_n(t) \to 0$ a.e. 于V_0. 因$f_n \rightharpoonup g$ 于$L^1(V_0)$, 我们有

$$0 \le \int_{V_0} |g(t)|dt \le \liminf \int_{V_0} |f_n(t)|dt.$$

利用 Lebesgue 控制收敛定理知: 序列 $\int_{V_0} |f_n(t)|\,dt$ 收敛于 $\int_{V_0} \lim |f_n(t)|dt = 0$. 于是$g(t) = 0$ a.e. 于V_0, 进而(2.22) 成立.

下证(2.23). 先证$\gamma_+ \le h_+(t)$ a.e. 于$[0,T]$. 反设不然. 若存在V_+ 的正测度子集$A \subseteq V_+$, 使当$t \in A$ 时, $\gamma_+ > h_+(t)$. 则对$\forall t \in V_+$, 我们有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} f_n(t) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{u_n(t)} \cdot f(t, u_n(t))v_n(t) \\ &\ge \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(t,s)}{s} \cdot \lim_{n\to\infty} v_n(t) \ge r_+ v(t).\end{aligned}$$

利用Fatou 引理，得

$$
\begin{aligned}
r_+\int_A v(t)dt &\le \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n(t)\,dt\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n(t)\,dt = \int_A g(t)\,dt\\
&= \int_A h_+(t)v^+(t)\,dt < r_+\int_A v(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

矛盾！故$r_+ \le h_+(t)$ a.e. 于V_+. 同理，$s_+ < h_+(t)$ 不能在V_+ 的任何正测度子集上成立. 若$t\in[0,T]\backslash V_+$, 则由$h_\pm(t)$ 在$[0,T]\backslash V_+$ 上的定义，不难看出：$r_+ \le h_+(t) \le s_+$ a.e. $t\in[0,T]\backslash V_+$. 至此，我们得到$r_+ \le h_+(t) \le s_+$ 对a.e. $t\in[0,T]$ 成立. 完全类似，可推出$r_- \le h_-(t) \le s_-$ 对a.e. $t\in[0,T]$ 成立.

综合上述，(2.23) 成立.

下面，我们由(2.24), (2.25) 及(2.26) 推出$v=0$ (这将与$\|v\|=1$ 矛盾！从而表明(d_1) 成立!).

首先v 不可能是一个非零常函数. 反设不然，则由(2.24) 知，γ_+ 或γ_- 中至少有一个恒等于0, 这与(2.26) 及$[r_+,s_+]\times[r_-,s_-]\subset(\Delta_1\cup\Delta_3)\backslash\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$ 相矛盾！再在$[0,T]$ 上积分(2.24) 两边，并利用周期边值条件(2.25) 知. v 在$[0,T]$ 上至少有两个零点. 因此，除$v\equiv 0$ 外(这时目的已达到!) 我们能选到$t^*\in[0,T]$, 使$v(t^*)=0$, 而$v'(t^*)>0$. 令

$$C \triangleq \frac{1}{v'(t^*)}.$$

将$v,\gamma_\pm$ T 周期的开拓到$\mathbb{R}^1$ 上后，定义$\widetilde{v},\widetilde{\gamma}_\pm:[0,T]\to\mathbb{R}$ 如下

$$\widetilde{v}(t)\triangleq Cv(t+t^*),\qquad \widetilde{\gamma}_\pm\triangleq\gamma_\pm(t+t^*),$$

我们得

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{v}''+c\widetilde{v}'+\widetilde{\gamma}_+(t)\widetilde{v}^+ + \widetilde{\gamma}_-(t)\widetilde{v}^- = 0 \qquad \text{a.e. 于 } [0,T]\\
&\widetilde{v}(0)=\widetilde{v}(T)=0 \qquad \widetilde{v}'(0)=\widetilde{v}'(T)=1.
\end{aligned}
$$

引入函数$z:[0,T]\to I\!R$

$$z(t)\triangleq \exp\left(\frac{c}{2}t\right)\widetilde{v}(t).$$

经过简单的计算可知：z 是非线性Dirichlet 边值问题

$$z''+\left(\widetilde{\gamma}_+(t)-\frac{c^2}{4}\right)z^+-\left(\widetilde{\gamma}_-(t)-\frac{c^2}{4}\right)z^-=0, \tag{2.27}$$

$$z(0)=z(T)=0 \tag{2.28}$$

的满足

$$\mathrm{sign}z'(T)=\mathrm{sign}z'(0) \tag{2.29}$$

的解. 由(2.26) 及题设$\mathcal{R}\triangleq[r_+-\frac{c^2}{4},s_+-\frac{c^2}{4}]\times[r_--\frac{c^2}{4},s_--\frac{c^2}{4}]\subset(\Delta_1\cup\Delta_3)\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$ 知，引理1 的题设被满足. 故由引理1 及(2.27) $\sim$ (2.29) 式，推得，$z\equiv 0$. 进而$\widetilde{v}\equiv 0$. 于是$v\equiv 0$.

再证(d_2). 选取一个连通的道路$\Gamma:[0,1]\to(\Delta_1\setminus\Delta_3)\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$, $\Gamma:\sigma\longmapsto(\mu_\sigma,\nu_\sigma)$ 使$\Gamma(0)=(c_+,c_-),\Gamma(1)=(\mu_1,\nu_1)$ 而$\mu_1=\nu_1$. 对每个$\sigma\in[0,1]$, 周期边值问题

$$u''+cu'+\mu_\sigma u^+-\nu_\sigma u^-=0$$

$$u(T)-u(0)=0,\quad u'(T)-u'(0)=0$$

仅有平凡解. 由此知，对$\forall\sigma\in[0,1]$, 从$X\to X$ 的映象

$$u\longmapsto u-K(-\mu_\sigma u^++\nu_\sigma u^-+\lambda u) \tag{2.30}$$

在0 点关于$B_R=\{u\in X\mid \|u\|<R\}$ 的Leray-Schauder 度是一个固定的奇数. (注意，当$\sigma=1$ 时，(2.30) 定义了一个奇映象. 对该映象在0 点关于B_R 用Brusk 定理). 又因当$\sigma=0$ 时，(2.30) 定义的映象即$H(0,1)$, 故(d_2) 成立. ∎

§ 5.3 两点边值问题•跨特征线扰动•延拓定理

在第三章中，我们已经讨论过非线性两点边值问题

$$\begin{aligned} u'' + u + g(x,u) &= h(x) \qquad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(其中g 是一个Carathéodory 函数，$h \in L^1(0,\pi)$) 的可解性，并逐步实现了由渐近一致性条件

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup \frac{g(x,u)}{u} = \beta < 3 \qquad \text{a.e.} \quad x \in [0,\pi]$$

向渐近非一致性条件的过渡.

本节继续考虑(3.1) 的可解性. 这里的非线性项g 在$+\infty$ 可以任意增长，只要g 在$-\infty$ 的增长有一个相应的限制. 为了陈述结果和证明结果，我们利用了Fucik 谱.

在本节的最后(见5.3.3), 我们也介绍非线性两点边值问题

$$\begin{aligned} u'' + m^2 u + g(x,u) &= e(x), \\ u(0) = u(\pi) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

当g 为跨特征线扰动时的可解性结果.

5.3.1 预备引理

在定理5.1.2 中取$\alpha = 1$, 便得如下:

引理 1 设$(a,b) \in I\!R^2$. 则非线性边值问题

$$u'' + au^+ - bu^- = 0, \qquad u(0) = u(\pi) = 0 \tag{3.3}$$

有非平凡解的充要条件为

$$(a,b) \in C_0^* \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k \cup C_k^*)\right],$$

其中

$$C_0^* = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-1)(b-1)=0\},$$

$$C_k = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > k^2,\ b>0,\ b^{\frac{1}{2}} = \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-k}\right\},$$

$$C_k^* = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > k^2,\ b>0,\ b^{\frac{1}{2}} = \frac{(k+1)a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-k}\right\}$$

$$\cup \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > (k+1)^2,\ b>0,\ b^{\frac{1}{2}} = \frac{ka^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{1}{2}}-k-1)}\right\}.$$

注 1 引理1 的证明包含了若干关于(3.3) 的非平凡解的有用的信息. 如

(I) 若$(a,b) \in C_{k(k=1,2,\cdots)}$, $u_{a,b}$ 为

$$u''+au^+-bu^-=0, \qquad u(0)=u(\pi)=0$$

的非平凡解，则$u_{a,b}$ 精确地有$2k-1$ 个零点于$(0,\pi)$.

(II) 若$(a,b) \in C^*_{k(k=0,1,\cdots)}$, $u_{a,b}$ 为

$$u''+au^+-bu^-=0, \qquad u(0)=u(\pi)=0$$

的非平凡解，则$u_{a,b}$ 在$(0,\pi)$ 上精确地有$2k$ 个零点.

(III) 若$u_{a,b}$ 在某两个相邻的零点间取正值，则这两点间的距离为$\pi a^{-\frac{1}{2}}$; 若$u_{a,b}$ 在某两个相邻的零点间取负值，则这两点间的距离为$\pi b^{-\frac{1}{2}}$.

引理 2 设$g_{\pm} \in L^{\infty}(0,\pi)$. 假设存在实数$a > 1$ 及$\varepsilon > 0$, 使

$$g_+(x) \leq a - \varepsilon, \qquad g_-(x) < \frac{a}{(a^{\frac{1}{2}} - 1)^2} - \varepsilon, \tag{3.4}$$

则非线性Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned} u'' + g_+(x)u^+ - g_-(x)u^- = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

要么仅有平凡解，要么有一个在$(0,\pi)$ 上严格正或严格负的非平凡解.

注 2 若$(a,b) \in C_1$, 则我们有

$$b = \frac{a}{(a^{\frac{1}{2}} - 1)^2}.$$

引理2 的证明　不妨设(3.5) 有一个非平凡解u. 利用(3.4), 我们可以比较u 与$u_{a,b}$ 的零点(这里$u_{a,b}$ 表示(3.3) 当$(a,b) \in C_1$ 的非平凡解). 据注 1, $u_{a,b}$ 在$(0,\pi)$ 内仅有一个零点，故由比较知，u 在$(0,\pi]$ 上仅有一个零点. 为了满足边值条件$u(\pi) = 0$, u 在$(0,\pi)$ 内必须严格正或严格负. ∎

5.3.2 Landesman-Lazer 型存在定理

考虑两点边值问题

$$\begin{aligned} u'' + u + g(x,u) = h \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中$h \in X \triangleq L^1(0,\pi)$. 以$\|\cdot\|$ 记X 的范数. 设$g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件，且存在$p_1 \in X$, $p_2 \in \mathbb{R}$, $p_2 > 0$, 使

$$|g(x,s)| \leq p_1(x) + p_2|s| \qquad \text{a.e.} \quad x \in [0,\pi]. \tag{3.7}$$

进一步，假定g 满足：对a.e. $x\in[0,\pi]$,

$$(g)\quad g^{-\infty}(x)=\limsup_{s\to-\infty}g(x,s)\ 及\ g_{+\infty}(x)=\liminf_{s\to+\infty}g(x,s)$$

分别有上界和有下界.

定理 5.3.1[121] 假设存在数$a>1$ 及$\varepsilon>0$ 使

$$\limsup_{s\to+\infty}\frac{g(x,s)}{s}\le a-1-2\varepsilon \tag{3.8}$$

$$\limsup_{s\to-\infty}\frac{g(x,s)}{s}\le \frac{a}{(a^{\frac{1}{2}}-1)^2}-1-2\varepsilon \tag{3.9}$$

对a.e. $x\in[0,\pi]$ 成立. 进一步设(g) 成立并且

$$\int_0^\pi g^{-\infty}(x)\sin xdx<\int_0^\pi h(x)\sin xdx<\int_0^\pi g_{+\infty}(x)\sin xdx, \tag{3.10}$$

则(3.6) 至少有一个解.

(注意：u 为 (3.6) 的一个解是指：$u\in C^1[0,\pi]$, $u'\in AC[0,\pi]$, $u(0)=u(\pi)=0$ 且使方程$u''+u+g(x,u)=h$ 对a.e. $x\in[0,\pi]$ 成立.)

定理5.3.1 的证明 (利用Leray-Schauder 延拓定理) 取数d : $0<d<\min\{\varepsilon,3\}$. 由于对$\forall e\in X$, 线性边值问题

$$u''+(1+d)u=e,\qquad u(0)=u(\pi)=0$$

有唯一解，记之为Ke. 这样便定义了一个线性算子$K:X\to X$.

$$K:\ e\longmapsto Ke,$$

易见K 是全连续的，且K 将$L^1(0,\pi)$ 中的有界集映成$C[0,\pi]$ 中的相对紧集. 由于g 的Nemytskii 映象将X 中的有界集映为X 中的有界集，故映象$H:[0,1]\times X\to X$

$$H(\tau,u)=u-K(h+\tau(du-g(\cdot,u)))$$

是一个紧同伦场.（即恒同映象的紧摄动.）我们的目的是证明：

(r) 存在数$r>0$, 使对任何满足$H(\tau,u)=0$ 的$(\tau,u)\in[0,1]\times X$, 有

$$\|u\|<r.$$

反设(r) 不成立. 则存在满足$H(\tau_n,u_n)=0$ 的序列$\{(\tau_n,u_n)\}\subseteq[0,1]\times X$, 使对$\forall n\in I\!N$ 有

$$\|u_n\|>n.$$

记$v_n\triangleq\frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则

$$v_n=K\left(\frac{h}{\|u_n\|}+\tau_n\left(dv_n-\frac{g(\cdot,u_n)}{\|u_n\|}\right)\right). \tag{3.11}$$

据(3.7), 序列$g_n\triangleq\frac{g(\cdot,u_n)}{\|u_n\|}$ 在X 中有界. 因此，通过选取一个子序列，我们可以假定$v_n\to v$ 于$C[0,\pi]$. (注意：这里利用了K 的全连续性). 而此时，(3.7) 表明：存在$p\in X$, 使对$n\in I\!N$, 有

$$|g_n(x)|\le|p_1(x)||u_n|^{-1}+p_2|v_n|\le p(x).$$

由此可知，当$|x_1-x_2|\to 0$ 时,

$$\int_{x_1}^{x_2}|g_n(x)|dx\to 0 \tag{3.12}$$

对$n\in I\!N$ 一致成立. 故$\{g_n\}_1^\infty$ 是弱序列紧的，即存在$f\in X$ 及$\{g_n\}_1^\infty$ 的子列，不妨仍记为$\{g_n\}$, 使$g_n\rightharpoonup f$ ($\rightharpoonup$ 表示X 中的弱收敛). 同时利用(3.12) 和(3.11) 可知$\lim_{|x_1-x_2|\to 0}|v'_n(x_1)-v'_n(x_n)|=0$ 对$n\in I\!N$ 一致成立. 因$v''_n+v_n+d(1-\tau_n)v_n+\tau_ng_n=\frac{h}{\|u_n\|}$, $v_n(0)=v_n(\pi)=0$, 故有$\{\|v''_n\|\}$ 有一个不依赖于n 的界. 由Rello 定理, 对$\forall n\in I\!N$, $\exists\xi_n\in(0,\pi)$, 使$v'_n(\xi_n)=0$. 又由

$$v'_n(x)-v'_n(\xi)+\int_{\xi_n}^{x}\left[v_n+d(1-\tau_n)v_n+\tau_ng_n-\frac{h}{\|u_n\|}\right]dx=0$$

可知，$\{v'_n\}_1^\infty$ 有界且等度连续．据Arzela-Ascoli 定理，我们不妨假定$v'_n \to v'$ 于$C[0,\pi]$．自然，我们可以假定$\tau_n \to \tau \in [0,1]$．由于每个有界线性映象既连续又弱连续，故在(3.11) 两边取弱极限知

$$v = K(\tau dv - \tau f). \tag{3.13}$$

注意由题设(g) 推知

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s} \geq 0 \qquad \text{a.e} \quad x \in [0,\pi]. \tag{3.14}$$

至此，利用(3.8), (3.9), (3.13)、Lebesgue 控制收敛定理及Fatou 引理，仿照定理5.2.1 的证法，可推得：存在$p_\pm \in L^\infty(0,\pi)$ 满足

$$0 \leq p_+(x) \leq a - 1 - 2\varepsilon, \quad 0 \leq p_-(x) \leq \frac{a}{(a^{\frac{1}{2}}-1)^2} - 1 - 2\varepsilon \tag{3.15}$$

a.e. 于$[0,\pi]$, 使

$$f(x) = p_+(x)v^+(x) + p_-(x)v^-(x) \tag{3.16}$$

对a.e. $x \in [0,\pi]$ 成立．而由(3.15) 和$d: 0 < d < \min\{\varepsilon, 3\}$ 的事实可知，$\tau p_\pm(x) + 1 + d(1-\tau)$ 满足引理2 的条件(3.4)．故由(3.13), (3.16) 及引理2 知，v 在$(0,\pi)$ 上不改变符号.

现在假设$v > 0$ 于$(0,\pi)$, 我们将导出矛盾(对于$v < 0$ 于$(0,\pi)$ 的情形，同理可导出矛盾): $H(\tau_n, u_n) = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} &u''_n + u_n + (1-\tau_n)du_n + \tau_n g(x,u_n) = h(x) \quad \text{a.e. } x \in (0,\pi) \\ &u_n(0) = u_n(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17) 两边同乘以$\sin x$, 然后分部积分得

$$\int_0^\pi [d(1-\tau_n)u_n + \tau_n g(x,u_n)] \sin x \, dx = \int_0^\pi h(x) \sin x \, dx. \tag{3.18}$$

因$v'(0)>0$, $v'(\pi)<0$ 又$\lim_{n\to\infty} v'_n = v'$ 于$C[0,\pi]$, 故当n 充分大时， $u_n(x)>0$. 由此推知序列$z_n(x) \triangleq d(1-\tau_n)u_n(x)+\tau_n g(x,u_n)$ 对a.e. $x\in[0,\pi]$ 有一个不依赖于n 的下界(参题设(g)), 且$u_n(x)\to\infty$ 在$(0,\pi)$ 的任何紧子区间上成立. 由此再利用题设(3.10) 推知

$$\int_0^\pi h(x)\sin x\,dx < \int_0^\pi \left[\liminf_{n\to\infty} z_n(x)\right]\sin x\,dx. \tag{3.19}$$

另一方面，据Fatou 引理及(3.18) 式可知:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [\liminf_{n\to\infty} z_n(x)]\sin x\,dx &\le \liminf_{n\to\infty}\int_0^\pi z_n(x)\,dx\\ &= \int_0^\pi h(x)\sin x\,dx,\end{aligned} \tag{3.20}$$

这便与(3.19) 相矛盾！故(r) 成立. 因此

$$\deg(H(1,u);\ B_r(0),0) = \deg(H(0,u);\ B_r(0),0), \tag{3.21}$$

其中$B_r(0)=\{u\in X \mid \|u\|<r\}$. 现取$r$ 充分大，使同伦$\overline{H}:[0,1]\times X\to X$

$$\overline{H}(\sigma,u) \triangleq u - K\big((1-\sigma)h\big)$$

满足$\overline{H}(\sigma,u)\neq 0\ \forall(\sigma,u)\in[0,1]\times\partial B_r(0)$. 由于对$\forall u\in X$, $\overline{H}(0,u)=H(0,u)$, 因此由(3.21) 可推知

$$\deg\big(H(1,u);\ B_r(0),0\big) = \deg\big(\overline{H}(1,u);\ B_r(0),0\big).$$

但因$u\longmapsto \overline{H}(1,u)$ 是一个线性$1-1$ 对应，故

$$\deg\big(H(1,u);\ B_r(0),0\big)\neq 0.$$

上式表明

$$u = K\big(h - g(\cdot\,,u) + du\big)$$

至少有一个解，即(3.6) 至少有一个解. ∎

5.3.3 高特征值的情形

Drábek [123] 利用Fučik 广义谱研究两点边值问题

$$\begin{aligned} u''+m^2u+g(x,u)&=e \\ u(0)=u(\pi)&=0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

的可解性. 获得如下结果.

定理 5.3.2 设$m\geq 1$. 假设$g:[0,\pi]\times I\!R\to I\!R$ 满足Carathéodory 条件且存在$p\in L^{\infty}(0,\pi)$ 及实数$c>0$ 使

$$|g(x,u)|\leq p(x)+c|u| \tag{3.23}$$

对a.e. $x\in[0,\pi]$ 成立；假设存在函数a, $A\in L^1(0,\pi)$ 及常数$r,R\in I\!R: r<0<R$, 使当$u\geq R$, 时

$$g(x,u)\geq A(u) \qquad \text{a.e.} \quad x\in[0,\pi]. \tag{3.24}$$

当$u\leq r$ 时,

$$g(x,u)\leq a(u) \quad \text{a.e.} \quad x\in[0,\pi]. \tag{3.25}$$

进一步，假设$(a_{m+1},b_{m+1})\in\widetilde{C}_{m+1}$ 使对a.e. $x\in[0,\pi]$, 有

$$\left.\begin{aligned} \limsup_{x\to+\infty}\frac{g(x,u)}{u}&\leq a_{m+1}-m^2 \\ \limsup_{x\to-\infty}\frac{g(x,u)}{x}&\leq b_{m+1}-m^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

且严格不等式在$[0,\pi]$ 的一个正测度集上成立. 其中$\widetilde{C}_1=C_0^*$, $\widetilde{C}_{2k}=C_k$, $\widetilde{C}_{2k+1}=C_k^*$.

若m 为偶数，我们还假设$(m^2,a_{m+1})\times(m^2,b_{m+1})\subset I\!R^2\backslash[C_0^*\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\cup C_k^*))]$. 则对任意满足：$\forall v\in\operatorname{span}\{\sin mx\}\backslash\{0\}$, 有

$$\int_{v>0}g_{+\infty}(x)v(x)dx+\int_{v<0}g^{-\infty}(x)v(x)dx>\int_0^{\pi}e(t)v(t)dt$$

的 $e \in L^1(0,\pi)$, 问题 (3.22) 至少有一个解. (其中 $g_{+\infty}(x) = \liminf_{u\to\infty} g(x,u), g^{-\infty}(x) = \limsup_{u\to-\infty} g(x,u)$).

注 3 当$(a_{m+1}, b_{m+1}) = ((m+1)^2, (m+1)^2)$ 时，这类特殊的问题我们曾在§3.5 中深入的讨论过.

注 4 定理5.3.1 是定理3.4.1 的推广. 若在定理5.3.1 中，特别地取$a = b = 2^2$, 则题设(3.8)~(3.9) 即变为

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{s} \le 3 - 2\varepsilon.$$

注 5 我们也可用符号条件替定理5.3.1 中的Landesman-Lazer 型条件(3.10) 来建立存在性结果.

§ 5.4 梁方程 • 不跨特征线扰动 • Leray-Schauder 原理

梁是工程建筑的基本构件之一. 对于梁方程的研究，有着非常重大的理论意义和实际意义. 近十多年里，已出现不少关于梁运动和梁弯曲方面的工作. 我们不打算系统地介绍这一发展动态. 感兴趣的读者请参阅[133], [135], [126] 等.

在§5.1 ~ §5.3 中，我们一直在二阶两参数特征值问题的Fŭcik 谱下从事工作. 为与此比较，本节介绍一类四阶两参数特征值问题的广义谱，并在扰动项不跨特征线的前提下，给出一类梁方程的可解性定理.

本节内容主要选自Pino 和Manásevich [129].

5.4.1 两参数特征值问题

弹性梁的形变在数学上是由四阶常微分方程来描写的. 本节

讨论四阶边值问题

$$y^{(IV)} = f(x, y, y'') \qquad 0 < x < 1 \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad y''(0) = \overline{y}_0, \quad y''(1) = \overline{y}_1 \tag{4.2}$$

的可解性. 其中$f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续.

为研究(4.1)–(4.2) 的可解性, 先搞清楚两参数特征值问题

$$y^{(IV)} = \alpha y - \beta y'' \tag{4.3}$$

$$u(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \tag{4.4}$$

的谱结构是必要的.

定理 5.4.1 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ 使(4.3)–(4.4) 有非平凡解的充分必要条件是

$$\frac{\alpha}{(k\pi)^4} + \frac{\alpha}{(k\pi)^2} = 1 \tag{4.5}$$

对某$k \in \mathbb{N}$ 成立.

证明　设$Ly = y''$. 则存在$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, 使

$$y^{(IV)} + \beta y'' - \alpha y = (L + r_1)(L + r_2)y. \tag{4.6}$$

不难看出, 若(4.3)–(4.4) 有非平凡解, 则$r_1 = (k\pi)^2$ 或者$r_2 = (k\pi)^2$, 某$k \in \mathbb{N}$. 不管是哪种情形, (4.3)–(4.4) 始终有非平凡解$\sin k\pi x$. 把这个非平凡解代入(4.3), 便可推出(4.5).

反过来, 若(4.5) 成立, 则不难验证$\sin k\pi x$ 确是(4.3)–(4.4) 的非平凡解. ∎

现在, 对$j \in \mathbb{N}$, 令

$$L_j = \left\{ (\alpha, \beta) \middle| \frac{\alpha}{(j\pi)^4} + \frac{\beta}{(j\pi)^2} = 1 \right\}. \tag{4.7}$$

我们称L_j 为(4.3)-(4.4) 的特征线. 值得注意的是：特征值对(α,β)属于至多两条特征线. 当(α,β) 仅属于一条特征线L_j 时，(α,β) 所对应的特征子空间为$\text{span}\{\sin j\pi x\}$; 当$(\alpha,\beta)\in L_j\cap L_k(j\neq k)$ 时，(α,β) 所对应的特征子空间为$\text{span}\{\sin j\pi x,\ \cos k\pi x\}$.

下面假设(α,β) 不是(4.3)-(4.4) 的特征值对. 即

$$\frac{\alpha}{(k\pi)^4}+\frac{\beta}{(k\pi)^2}\neq 1,\qquad \forall k\in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

再假设$h\in L^2(0,1)$. 由Fredholm 抉择可知，如下边值问题

$$y^{(IV)}=\alpha y-\beta y''+h(x) \tag{4.9}$$

$$y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \tag{4.10}$$

对$\forall h\in L^2(0,1)$, 均有唯一解. 进一步，这个解可以Fourier 展开成

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2}\sin k\pi x, \tag{4.11}$$

其中

$$h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k\sin k\pi x. \tag{4.12}$$

此外，我们还有

$$y''(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\pi^2h_k\sin k\pi x}{k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2} \tag{4.13}$$

定义算子$A,B:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$

$$A(h)=y,\quad B(h)=y'', \tag{4.14}$$

则由(4.12) 和(4.13) 知：A, B 为紧的线性算子. 在(4.14) 中，y 为相应于h 的问题(4.9)~(4.10) 的唯一解. 不难算出

$$\|A\| = \max_{k\in \mathbb{N}}\left\{\frac{1}{|k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2|}\right\};$$

$$\|B\| = \max_{k\in \mathbb{N}}\left\{\frac{k^2\pi^2}{|k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2|}\right\}.$$

5.4.2 存在性定理

定理 5.4.2 设$(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2$ 满足

$$\frac{\alpha}{(k\pi)^4}+\frac{\beta}{(k\pi)^2}\neq 1 \qquad \forall k\in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

假设存在正常数$a, b, c>0$, 使

$$a\max_{k\in \mathbb{N}}\left\{\frac{1}{|k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2|}\right\}+b\max_{k\in \mathbb{N}}\left\{\frac{k^2\pi^2}{|k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2|}\right\}<1, \tag{4.16}$$

并且

$$|f(x,y,z)-(\alpha y-\beta z)|\le a|y|+b|z|+c \tag{4.17}$$

对$\forall x\in[0,1], y\in \mathbb{R}, z\in \mathbb{R}$ 成立，则(4.1) ~ (4.2) 至少有一个解.

注 1 (4.15) 和(4.16) 蕴含：对$\forall k\in \mathbb{N}$, 有

$$\left|\frac{a}{k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2}\right|+\left|\frac{bk^2\pi^2}{k^4\pi^4-\alpha-\beta k^2\pi^2}\right|<1. \tag{4.18}$$

而(4.18) 等价于矩形$[\alpha-a,\alpha+a]\times[\beta-b,\beta+b]$ 与每一条特征线L_j 不交. 从这一点上看，(4.15) 和(4.16) 是一类不跨越特征线的条件.

注 2 定理5.4.1 仅在比(4.18) 较强的条件(4.15) 和(4.16) 下获得存在性结果. 在§5.2 中，我们曾在$[r_+,s_+]\times[r_-,s_-]\subseteq(\Delta_1\cup$

$\Delta_3)\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}C_k$ 下，证得Duffing 方程T 周期解的存在性. 但讫今为止，能否在$[\alpha-a,\alpha+a]\times[\beta-b,\beta+b]\subset I\!R^2\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}L_j$ (即(4.18)) 下获得(4.1)-(4.2) 的可解性结果，仍然是一个公开问题.

定理5.4.2 的证明　选取$w(x)\in C^2[0,1]$:

$$w(0)=y_0, w(1)=y_1, w''(0)=\overline{y}_0, w''(0)=\overline{y}_1$$

作变换$y=z+w$, 则(4.1)-(4.1) 化为

$$\frac{dz}{dx}=\widehat{f}(x,z,z''), \tag{4.19}$$

$$z(0)=z(1)=z''(0)=z''(1)=0. \tag{4.20}$$

故我们不失一般性，假设(4.2) 中的$y_0=y_1=\overline{y}_0=\overline{y}_1=0$. 定义$T: L^2(0,1)\times L^2(0,1)\to L^2(0,1)\times L^2(0,1)$

$$T(y,z)=\big(A\big[f(\cdot,y,z)-(\alpha y-\beta z)\big],\ B\big[f(\cdot,y,z)-(\alpha y-\beta z)\big]\big) \tag{4.21}$$

其中A,B 的定义见(4.14). 显见，(4.1)–(4.2) 的解即为T 在$L^2(0,1)\times L^2(0,1)$ 中的不动点.

为证

$$(y,z)=T(y,z) \tag{4.22}$$

有不动点，我们利用Leray-Schauder 原理. 为此只需证得同伦方程

$$(y,z)=\lambda T(y,z),\qquad \lambda\in[0,1] \tag{4.23}$$

的所有可能解有一个不依赖于$\lambda\in[0,1]$ 的先验界. 由T 的定义式(4.21) 易知

$$\|y\|_{L^2}\le\|A\|\{a\|y\|_{L^2}+b\|z\|_{L^2}+c\}, \tag{4.24}$$

$$\|z\|_{L^2}\le\|B\|\{a\|y\|_{L^2}+b\|z\|_{L^2}+c\}. \tag{4.25}$$

结合(4,24) 和(4.25), 并利用(4.16) 和$\|A\|$, $\|B\|$ 的定义, 推知: 存在常数$M = M(a, b, c, \|A\|, \|B\|) > 0$, 使

$$\|y\|_{L^2} + \|z\|_{L^2} \leq M. \qquad \blacksquare$$

附注 V

1. 利用变分方法在Fǔcik 谱下讨论周期边值问题的工作, 请参看Cuesta 和Gossez [120].

2. 关于梁方程、链桥方程研究动态的综述型文献, 有Lazer 和Mckenna [96].

3. Gupta [133], [134], [135] 等讨论其他边值条件下同时当非线性项含有y, y', y'', y''' 等变量时的可解性. Gupta [132] 及马如云[139] 讨论扰动项跨特征值时, 梁弯曲方程解的存在性和多解的存在性.

4. 丁同仁等[65] 利用时间映象的渐近常数, 给出新的非共振条件. (涉及Fǔcik 谱的情形). 再利用特型的延拓定理, 证明半线性Duffing 方程T 周期解的存在性.

参考文献

第一章参考文献

[1] 关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门，上海科技出版社(1979).

[2] 张恭庆，临界点理论及其应用，上海科技出版社(1986).

[3] 陈文源，非线性泛函分析，甘肃人民出版社(1982).

[4] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社(1985).

[5] 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌，实变函数论与泛函分析，人民教育出版社(1979).

[6] 尤秉礼，常微分方程补充教程，人民教育出版社(1981).

[7] 丁同仁，在共振点的非线性振动，中国科学(A 辑), (1982), 1–13.

[8] 丁伟岳，扭转映射的不动点与常微分方程的周期解，数学学报，25(2) (1982), 227–235.

[9] 李树杰、冯德兴，共振下一类常微分方程组周期解的存在唯一性，系统科学与数学，6(4) (1986), 240–246.

[10] 李立康、郭毓陶，索伯列夫空间引论，上海科技出版社(1981).

[11] 张石生，不动点定理及应用，重庆出版社，(1984).

[12] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic. Press (1975).

[13] D. Gilbarg and N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag (1977). (中译本，叶其孝等译，上海科技出版社，1981).

[14] S. Fučik, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, D. Reidel, Dordrecht (1980).

[15] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Spring-Verlag (1985).

[16] J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, in "CMBS Regional Conference Series in Mathematics, No. 40." Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1979.

[17] J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian system, Spring-Verlag (1989).

[18] Otto Vejvoda, Partial Differential Equations: time-periodic solutions, Martinus Nijhoff. (1982).

[19] F. Browder, problèms Non-Lineares, les Press de l'Université de Montreal, Montreal (1968).

[20] F. Browder, On continuity of fixed point under deformations of continuous mappings, Summa Brasil Math., 4 (1960), 183–190.

[21] D.G. Costa and J.V.A. Goncalves, Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Anal. Appli., 84 (1984), 328–337.

[22] I. Massaboò and J. Pejsachowicz, On the connectivity properties of the solution set of parametrized families of compact vector fields, J. Function Analysis, 59 (1984), 151–166.

[23] J. Ize, I. Massabó, J. Pejsachowicz, and A. Vignoli, Nonlinear Multiparametric Equations: Structure and Topological Dimension of Global Branches of Solutions Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 45(1986), Part 1, 529–540.

[24] P.M. Fitzpatrick and J. Pesjsachowcz, Nonorientability of the index bundle and several-parameter bifurcation, J. Functional Analysis, 98(1) (1991), 42–58.

[25] T. Bartsch, The global structure of the zero set of a family of semilinear Fredholm maps, Nonlinear Analysis, TMA, 17(4) (1991) 313–332.

[26] Shui-Nee Chow, A bifurcation theorem for critical points of variational problems, Nonlinear Analysis, 12(1) (1988), 51–62.

[27] M. Martelli and A. Vignoli, On the structio of the solution set of nonlinear equations, Nonlinear Analysis, 7(7) (1983), 685–693.

[28] M. Furi, M. Martelli and A. Vignoli, On the solvability of non-linear operator equationsin novmed spaces, Annali Mat. Pura Appl., 4(124) (1980), 321–343.

[29] J. Leray and J. Schauder, Topologie et équations functionelles, Ann. Sci. École Norm. Sup., 51 (1934), 45–78.

[30] S. Solimini, On the solvability of some elliptic partial differential equation with linear part at resonane, J. Math. Analy & Appli., 117(4) (1986), 138–152.

[31] P. Bartolo, V. Benci and F. Fortunato, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity. Nonlinear Analysis, 7 (1983), 981–1012.

[32] T. Wang, A Static bifurcation theorem for critical point, Nonlinear Analysis, 15(12) (1990), 1181–1186.

第二章参考文献

[33] 丁同仁，在共振点的非线性振动，中国科学(A 辑), (1982), 1–13.

[34] 葛渭高，n- 维 Duffing 型方程$\ddot{x} + C\dot{x} + g(t,x) = p(t)$ 的2π 周期解，数学年刊，9A(4) (1988), 498–505.

[35] 葛渭高，n- 维 Liénard 型方程的调和解，数学年刊，11A(3) (1990), 297–307.

[36] 黄先开，具有时滞的保守系统的2π 周期解系统科学与数学，9(4) (1989), 298–308.

[37] 柳彬，半线性 Duffing 方程调和解的一个存在定理，数学学报，34(2) (1991), 165–170.

[38] Shen Zuhe (沈祖和), On the periodic solution to the Newtonian equation of motion, Nolinear Analysis, 13(2) (1989), 145–150.

[39] Li Weigu (李伟固), A necessary and sufficient condition on existence and uniqueness of 2π-periodic solution of Duffing equation, Chin. Ann. of Math., 11B(3) (1990), 342–345.

[40] 姚庆六，马如云，不可微泛函的一个临界点定理，西北师范大学学报，1 (1989), 1–5.

[41] 马如云，半线性Duffing 方程周期边值问题的可解性，数学年刊，14(4) (1993).

[42] H. Amann, The unique solvability of semilinear operator equation in Hilbert spaces, J. Math. Pures Appl., 61 (1982), 149–175.

[43] S.A. Tersian, A minimax theorem and applications to nonresonance problems for semilinear equation. Nonlinear Analysis, TMA., 10(7) (1986), 651–668.

[44] I. Ekeland and R. Temam, Convex analysis and variational problems, North-Hollard, Amsterdam (1976).

[45] C.L. Dolph, Nonlinear integral equations of Hammerstien type, Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949), 289–307.

[46] A.C. Lazer, E.M. Landesman and R.D. Meyers, On saddle point theorem in the calculus of variations, the Ritz algorithm and monotone convergence, J. math. Analysis Applic., 52 (1975), 591–614.

[47] J. Mawhin and J.R. Ward, Asymptotic nonuniform nonresonance condition in the periodic-Dirichlet problem for semilinear wave equations, Annali Mat. Pura Appl., 135 (1983), 85–97.

[48] N.P. Cac, On an Elliptic Boundary Value Problem at Double Resonance, J. Math. Anal. Appli., 132(2) (1988), 473–383.

[49] J.V.A. Goncalves, On nonresonant sublinear elliptic problems, Nonlinear Analysis, 15(10) (1990), 915–920.

[50] J. Mawhin, J.R. Eard and M. Willem, Variatiational methods and semilinear elliptic equations, Archs, Ration. Meth. Analysis, 95 (1986), 269–277.

[51] De Figuelredo D.G. and J.P. Gossez, nonresonance below the first eigenvalue for a semilinear elliptic problem, Math. Annalen, 281 (1988), 589–610.

[52] D.G.De Figueirdo and I. Massabo, semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity interacting with the first eigenvalue, J. Math. Anal. Appl., 156(2) (1991) 381–394.

[53] D.G.De Figueirdo and H. Miyagaki, semilinear elliptic equation with the primitive of the nonlinearity awat from the specturm, Nonlinear Analysis, 17(12) (1991), 1201–1219.

[54] C. Fabry and A. Fonda, Nonlinear equations at resonance and generalized eigenvalue problems, Nonlinear Analysis, 18(5) (1992), 427–445.

[55] A. Fonda, J.P. Gossez and F. Zanolin, On are resonance condition for a similinear elliptic problem, Differential and integral equations, 4(5) (1991), 945–951.

[56] J.P. Gossez and P. Omari, Periodic solution of a second order ordinary differential Equation: A necessary and sufficient condition for nonresonance, J. Differential Equn., 94 (1991) 67–82.

[57] P. omari and F. Zanolin, A note on nonlinear oscillations at resonance, Acta. Math. Sinica. (N.S.), 3 (1987), 351–361.

[58] J.P. Gossez and P.Omari, A necessary and sufficient condition of nonresonance for a semilinear Neumann problem, Proc. Amer. Math. Soc., 114(2) 1992, 433–442.

[59] W.S. Loud, Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations of Duffing Type, Proc. U.S.-Japan Seminar on Differential and Functional Equations (Minneapolis, Minn, 1967), 1967, 199–224.

[60] L. Césari, Nonlinear Analysis (A collection of papers in homor of E,H. Rothe), Ed. Césari, L. et al. 1978.

[61] J. Mawhin, An extensionof a theorem of A.C. Lazer on forced nonlinear

oscillations, J. Math. Anal. Appli., 40 (1972), 20–29.

[62] J. Mawhin and J.R. Ward Jr. Nonuniform nonresonance conditions at the two first eigenvalues for periodic solution of forced Liénard and Duffing equations, Rocky Mountain J. Math., 12 (1982), 643–654.

[63] A.C. Lazer and D.E. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance, Ann. Mat. Pura. Appl., 82 (1969) 49–68.

[64] J. Mawhin and J.R. Ward Jr., Nonresonance and existence for nonlinear elliptic boundary value problems, Nonlinear Analysis, 6 (1981), 677–684.

[65] T. Ding and F.Zanolin, Time-maps for the solvability of periodically perturbed nonlinear Duffing equation, Nonlinear Analysis, 17(7) (1991), 635–654.

[66] E.M. Landesman & A.C. Lazer, Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech., 19(7) (1970), 609–623.

第三章参考文献

[67] D.G. Costa and J.V.A. Goncalves, Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance, J.Math. Analy & Appli., 84(2) (1981), 328–337.

[68] H. Amann, A.Ambrosetti and G. Mancini, Elliptic equations with noninvertible Fredholm linear part and bounded nonlinearities, Math. Z., 158 (1978), 179–194.

[69] H. Amann and G. Mancini, Some applications of monotone operator theory to resonance problems, Nonlinear Analysis, 3 (1979), 815–830.

[70] H. Brezis and L. Nirenberg, Characterizations of some-nonlinear operators and application to boundary value problem, Annali Scu. Norm. Sup. Pisa, 5 (1978), 225–236.

[71] L. Cesari and R. Kannan, Qualitative study of a class of nonlinear boundary

value problems at resonance, J. Diff. Eqns., 56 (1985) 63–81.

[72] R. Kannan, J.J. Nieto and M.B. Ray, A class of nonlinear boundary value problems without Landesman-Lazer condition, J. Math. Analy & Appli, 105 (1985), 1–11

[73] J.Mawhin, J.R. Ward and M. Willem, Necessary and sufficient conditions for the solvability of a nonlinear two-point boundary value problem, Proc. Amer. Math. Soc., 93 (1985) 667–674.

[74] A. Ambrosetti and G. Mancini, Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance, The case of the simple eigenvalue, J. Differential Equations, 28 (1978), 220–245.

[75] S. Ahmad, A.C. Lazer and J.L. Paul, elemantary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance. Ind. Univ. Math. J., 25 (1976), 933–944.

[76] P.H. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear elliptic PDE, Nonlinear Analysis, 2 (1978), 161–177.

[77] S. Fucik and P. Hess, Nonlinear perturbations of linear operators having nullspace with strong unique continuation property, Nonlinear Analysis, 3 (1979) 271–277.

[78] D.G. De Figueiredo and Ni W. M., Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman-Lazer condition, Nonlinear Analysis, 3 (1979), 629–634.

[79] W. Stork, Perturbationby Vanishing nonlinearities, Nonlinear Analysis 7(7) (1983), 739–746.

[80] S. Ahmad, A resonance problem in which the nonlinearity may grow linearly, Proc. Amer. Math. Soc., 92 (1984), 381-384.

[81] S. Ahmad, Multiple nontrivial solutions of resonant and nonresonance asymptotically linear problems. Proc. Amer. Math. Soc., 96(3) (1986) 405–409.

[82] C.P. Gupta, Solvability of a boundary value problemwith the nonlinearity

satisfying a sign condition, J. Math. Anal. Appl., 129 (1988), 482–492.

[83] C.P. Gupta, Existence and uniqueness results for the bending of an elastic beam equation at resonance, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 208–225.

[84] R. lannacci and M.N. Nkashama, Nonlinear boundary value problems at resonance, Nonlinear Analysis, 11(4) (1987), 455–473.

[85] R. Lannacci and M.N. Nkashama, Unbounded perturbations of forced second order ordinary differential equations at resonance, J. Diff. Eqns., 69 (1987), 289–309.

[86] R. Lannacci & M.N. Nkashama, Nonlinear two point boudary value problem at resonance without landesman-Lazer condition, Proc. Amer. Math. Soc., 106(4) (1989), 943–952.

[87] A. Rumbos, A semilinear elliptic boundary value problem at resonance where the nonlinearity may grow linearly, Nonlinear Analysis, 16(12) (1991), 1159–1168.

[88] J. Santanilla, Solvability of a nonlinear boundary value problem without landesman-Lazer condition, Nonlinear Analysis, 13(6) (1989), 683–694.

[89] N. Hirano, Multiple nontrivial solutions of semilinear elliptic equations, Proc . Amer. Math. Soc., 103(2) (1988), 468–472.

[90] N. Hirano, Existence of nontrivial solution of semilinear elliptic equations, Nonlinear Analysis, 13(6), 695–706.

[91] C. P. Gapta, A two-point boundary value problem of Dirichlet type with resonance at infinitely many eigenvalues, J. Math. Anal. Appl., 146(2) (1990), 501–511.

[92] M.A. Del Pino, R.F. Manasevich and A. Murua, On the number of 2π periodic solutions for $u'' + g(u) = s(1+h(t))$ using the Poincare-Birkhoff theorem, JDE, 95 (1992), 240–258.

[93] W.Y. Ding. A generalization of the Poincare-Birkhoff theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 341–346.

[94] D.C. Hart, A.C. Lazer and P.J. Mckenna, Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems, SIAM. J. Math. Anal. 17 (1986), 1332–1338.

[95] A.C. Lazer & P.J. Mckenna, On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem, J. Math. Anal. Appl., 84 (1981), 282–294.

[96] A.C. Lazer and P.J. Mckenna, large-amplitude pertiodie oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, SIAM Review, 32(4)(1990), 537–578.

[97] Song-Sun Lin, Some results for semilinear differential equation at resonance, J. Math. Anal. Appl., 93(2) (1983) 574–592.

[98] V. Cafagna and G. Tarantello, Multiple solutions for some semilinear elliptic equations, Math. Ann., 276 (1987) 645–656.

[99] S. Ahmad, Nonselfadjoint resonance problems with unbounded perturbations, Nonlinear Analysis, 10(2) (1986), 147–156.

[100] M. Arias, Nonselfadjont boundary value problems at resonance with nonlinearities which may grow linearly, Nonlinear Analysis, 15(2) (1990), 155–164.

[101] 姚庆六，马如云，几类半线性椭圆共振问题，数学研究与评论，10(1) (1990), 131–136.

[102] 马如云，一类半线性两点边值共振问题的可解性，数学学报，2 (1993), 99–105.

第四章参考文献

[103] M. Schechter, Solution of nonlinear problem at resonance, Indiana Univ. Math. J., 39 (1990), 1061–1080.

[104] M. Schechter, Nonlinear elliptic boundary value problems at strong resonance, Amer. J. Math., 112 (1990), 439–460.

[105] D. Arcoya & A. Canáda, Critical point theoremsand applications to nonlinear boundary value problems, Nonlinear Anal., 14 (1990), 393–411.

[106] E.A. DE B.E. Silva, Linking theorems and applications to semilinear elliptic problem at resonance, Nonlinear Anal., 16(5) (1991) 455–478.

[107] J.R. Ward Jr, A boundary value problem with a periodic nonlinearity, Nonlinear Anal., 10(2) (1986), 207–213.

[108] D. Lupo, S. Solimini & Synopsis, A note on a resonance problem, Proceedings of the Royal Society Ediburgy, 102A (1986) 1–7.

[109] E.N. Dancer, On the use of asymptotics in nonlinear boundary value problems, Annali Mat. Pura Appl., 131 (1982), 167–185.

[110] A. Capozzi, D. Lupo and S. Solimini, On the existence of a nontrivial solution to nonlinear problems at resonance, Nonlinear Anal., 13(2) (1989), 151–164.

[111] J. Mawhin and M. Willem, Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations, J. Differential Equation, 52(2) (1984), 264–287.

[112] Kung-ching Chang and Liu Jiaquan, A strang resonance problem, Chinese Annals of Math., 11B(2) (1990).

[113] Kung-Ching Chang, On the periodic nonlinearity and multiplicity of solutions, Nonlinear Anal., 13(5) (1989), 527–538.

[114] P. Martinez-Amores, J. Mawhin, R. Ortego and M. Willem, General results for the existence of nondegenerate periodic solutions of some differential systems with periodic nonlinearities, J. Differential Equation, 91(1) (1991), 138–148.

[115] Song-Sun Lin, Some results for semilinear differntial equation at resonance, J. Math. Anal. Appl., 93(2) (1983), 574–592.

[116] 汪守宏，一类波方程的自由强共振问题，数学年刊，10A(3) (1989), 289–298.

[117] 徐登洲、姚庆六、马如云，一类椭圆共振问题的可解性，高校应用数学学报，6(1) (1991), 80–86.

[118] J.M. Coron, Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity, Math. Annalen., 263(1983) 273–285.

第五章参考文献

[119] J.P. Gossez and P. Omari, Nonresonance with respect to the Fŭcik spectrum for periodic solution of second order ordinary differential equations, Nonlinear Anal., TMA, 14(12) (1990), 1079–1104.

[120] M. Cuesta and J.-P. Gossez, A variational approach tononresonance with respect to the Fučik spectrum, Nonlinear Anal., TMA, 19(5) (1992), 487–500.

[121] P. Drábek, On the resonance problem with arbitrary linear growth, J. Math. Anal. Appl., 127 (1987) 435–442.

[122] P. Drabek & S. Invernizzi, On the periodic BVP for the forced Duffing equation with jumping nonlinearity, Nonlinear Anal., 10(7) (1986), 643–650.

[123] P. Drabek, Landesman-Lazer condition for nonlinear problem with jumping nonlinearities, J. Differential Equations, 85 (1990), 186–199.

[124] J. -P. Gossez and P. Omair, Periodic solution of a second order ODE: A necessary and sufficient condition for nonresonance, J. Diff. Eqns., 94 (1991), 67–82.

[125] S. Fŭcik, J. Nečas, J. Souček & V. Souček, Spectral Analysis of Nonlinear Operators, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 346, Springer-Verlag (1973).

[126] R.A. Usmari, A uniquess theoremfor a class of boundary value problem, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 327–335.

[127] A.R. Aftabizadeh, Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., 116 (1986) 415–426.

[128] Yisong Yang, Fourth-order Two-point boundary value problems, Proc.

Amer. Math. Soc., 104(1), 1988.

[129] M.A. Del Pino and R.F. Manasevich Existence for a foruth-order boundary value problem under a two-parameter nonresonance condition, Proc. Amer. Math. Soc., 112(1) (1991). 81–86.

[130] C.P. Gupta, A nonlinear boundary value problem associated with the static equilibrium of an elastic beam supported by sliding clamps, Internat. J. Math. & Math. Sci., 12(4) (1989), 697–712.

[131] C.P. Gupta, Solvability of a fourth-order Boundary value problem with periodic boundary conditons, Internat. J. Math. & Math. Sci., 11(2) (1988), 275–284.

[132] C.P. Gupta, Existence and uniqueness results for the bending of an elastic beam equation at resonance, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 208–225.

[133] C.P. Gupto, Existence of a fourth-order boundary value problem with periodic boundary condition II, Internat. J. Math. & Math. Sci., 14(1) (1991), 127–138.

[134] C.P. Gupta, Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation, Appli. Analysis, 26 (1988), 289–304.

[135] C.P. Gupta, Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems, Appli. Analysis, 36 (1990), 157–169.

[136] A.C. Lazer and J.P. Mckenna, Existence, uniqueness and stability of ascillations in differential equations with asymmetric nonlinearities, Trans. Amer. Math. Soc., 315 (1989), 721–739.

[137] J. Golver, A.C. Lazer and P.J. Mckenna, Existence pf stability of Large scale nonlinear oscillation in suspension bridge, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 40 (1989) 172–220.

[138] A.C. Lazer and P.J. Mekenna, Critical point theory and boundary value problems with nonlinearity crossing multiple eigenvalues II, Comm Partial. Diff. Eqns., 11 (1986), 1053–1976.

[139] 马如云, 弹性梁方程共振问题的几个多解存在定理, 应用数学和力学, 14(2) (1993), 181–188.

[140] 马如云, 一类弹性梁弯曲方程共振问题的可解性, 工程数学学报, 9(2) (1992), 48–55.